Um Estudo Introdutório

Sobre o

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Francisco José dos Santos
Suzete Maria Silva Afonso
(Autores)



Diretora: Bárbara Aline Ferreira Assunção
Produção Gráfica, Capa, Diagramação: Editora Aluz
Jornalista Grupo Editorial Aluz: Barbara Aline Ferreira Assunção, MTB 0091284/SP
Bibliotecária Responsável: Sueli Costa, CRB-8/5213

CARO LEITOR,
Queremos saber sua opinião sobre nossos livros. Após a leitura, siga-nos no Instagram @revistarcmos e visite-nos no site https://submissoesrevistacientificaosaber.com/livros/

Copyright © 2025 by Francisco José dos Santos & Suzete Maria Silva Afonso

Todos os direitos reservados.
Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida sob quaisquer meios existentes sem autorização por escrito do autor
EBPCA - Editora Brasileira de Publicação Científica Aluz

Contato:
Email: rcmos.rev@gmail.com
Telefone: +55 11 97228-7607
Prefixos Editoriais:
ISSN 2675-9128
ISBN 978-65-994914
ISBN 978-65-996149
ISBN 978-65-995060
DOI 10.51473

Endereço: Rua Benedito Carlixto, 143, térreo – Centro, SP, Monga-guá, Brasil | CEP: 11730-000. CNPJ 30006249000175

https://submissoesrevistacientificaosaber.com/livros/

Conselho Editorial:
1. Pós-Dr. Sérgio Nunes de Jesus – Rondônia, Brasil
2. Pós-Dra. Fabíola Ornellas de Araújo - São Paulo, SP
3. Pós-Dr. José Crisólogo de Sales Silva - São Paulo, Brasil.
4. Dr. Eliuvomar Cruz da Silva – Amazonas, Brasil.
5. Dra. Laury Vander Leandro de Souza – São Paulo, Brasil
6. Dr. Maurício Antônio de Araújo Gomes - Massachusetts, Estados Unidos.
7. Dr. Jorge Adrihan N. Moraes – Paraguai
8. Dr. Eduardo Gomes da Silva Filho - Roraima, Brasil.
9. Dra. Ivanise Nazaré Mendes - Rondônia, Brasil.
10. Dra. Celeste Mendes - São Paulo, Brasil
11. Dra. Maria Cristina Sagário - Minas Gerais, Brasil.
12. Dr. Ivanildo do Amaral - Assunção, Paraguai.
13. Dr. Luiz Cláudio Gonçalves Júnior - São Paulo, Brasil.
14. Dr. José Maurício Diascânio - Espírito Santo, Brasil.
15. Dr. Geisse Martins - Flórida, Estados Unidos.
16. Dr. Cyro Masci - São Paulo, Brasil.
17. Dr. André Rosalem Signorelli - Espírito Santo, Brasil.
18. Dra. Silvana Maria Aparecida Viana Santos - Espírito Santo, Brasil
19. Me. Carlos Alberto Soares Júnior – Fortaleza, Ceará, Brasil.
20. Me. Michel Alves da Cruz - São Paulo-SP, Brasil.
21. Me. Paulo Maia – Belém, Pará, Brasil.
22. Me. Carlos Jose Domingos Alface – Maputo, Moçambique
23. Me. Hugo Silva Ferreira - Minas Gerais, Brasil.
24. Me. Walmir Fernandes Pereira – Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
25. Me. Solange Barreto Chaves – Vitória da Conquista, Bahia, Brasil.
26. Me. Rita de Cassia Soares Duque - Mato Grosso, Brasil.
27. Me. Cesar Rodrigues Barrinho - Mato Grosso, Brasil
28. Me. Renan Italo Rodrigues Dias - São Paulo, Brasil

Revisores, Avaliadores Externos e Pareceristas
Guilherme Bonfim
Felipe Lazari
Fernando Mancini
Francisca Karoline Ferreira Assunção
Andrea Sousa
Janilson Ribeiro Batista Eliane Compri de Azevedo Mattos
Martinho Vicente Caito
Suellen Iaskevitz Carneiro
Marcelo Zampolli
Raul de Miguel Benjamim Jofrisse Nhamitambo
Jovana Souza de Oliveira
Juvenal Laurinda da Silva Chadreque
Natanael Falquetto de Sá Raposa
Antônio Filho
Alana Freitas Miranda
Lorena de Andrade
Ana Luiza da Silva Teles
Amanda Regina Marcelino dos Santos
Angela Ancelmo
Charles Cosme de Souza
Matheus Candido Barcelos
Salem Suhail El Khatib

Equipe Técnica:
Editora-chefe: Bárbara Aline Ferreira Assunção - São Paulo, Brasil.
Apoio Técnico: Fernando Mancini - São Paulo-SP, Brasil.
Jornalista Grupo Editorial Aluz: Bárbara Aline Ferreira Assunção - São Paulo, Brasil. MTB 0091284/SP.
Bibliotecária Responsável: Sueli Costa - CRB-8/5213 (SC Assessoria Editorial, São Paulo, Brasil).

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Um estudo introdutório sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e aplicações
1. Ed – São Paulo: EBPCA - Editora Brasileira de Publicação Científica Aluz, 2025.
ISBN: 978-65-85931-
DOI: 10.51473/ed.al.uei
CDD-370
Índices para catálogo sistemático:
1. I. Matemática. 2. Banach 3. Teorema do ponto fixo. Francisco José dos Santos & Suzete Maria Silva Afonso . Título
2. CDD-370

Índices para catálogo sistemático:
1. Educação Grafia atualizada segundo o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa de 1990, que entrou em vigor no Brasil em 2009

Diretora: Bárbara Aline Ferreira Assunção
Produção Gráfica, Capa, Diagramação: Editora Aluz
Jornalista Grupo Editorial Aluz: Barbara Aline Ferreira Assunção, MTB 0091284/SP
Bibliotecária Responsável: Sueli Costa, CRB-8/5213

CARO LEITOR,
Queremos saber sua opinião sobre nossos livros. Após a leitura, siga-nos no Instagram @revistarcmos e visite-nos no site https://submissoesrevistacientificaosaber.com/livros/

Copyright © 2025 by Francisco José dos Santos & Suzete Maria Silva Afonso

Todos os direitos reservados.
Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida sob quaisquer meios existentes sem autorização por escrito do autor
EBPCA - Editora Brasileira de Publicação Científica Aluz

Contato:
Email: rcmos.rev@gmail.com
Telefone: +55 11 97228-7607
Prefixos Editoriais:
ISSN 2675-9128
ISBN 978-65-994914
ISBN 978-65-996149
ISBN 978-65-995060
DOI 10.51473

Endereço: Rua Benedito Carlixto, 143, térreo – Centro, SP, Mongaguá, Brasil | CEP: 11730-000. CNPJ 30006249000175

https://submissoesrevistacientificaosaber.com/livros/

Impacto potencial desta pesquisa

Esta pesquisa tem como objetivo principal fornecer um material didático para estudantes da área da matemática e afins, sobre a teoria de espaços métricos. Cabe mencionar que este trabalho é dedicado a estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e a explorar a teoria de espaços métricos necessária ao seu entendimento, destacando a interconexão entre essa teoria, o referido teorema, suas aplicações e a beleza da Matemática. Dentre as aplicações exploradas, estão a viabilidade do buscador do Google e o processo de compressão de imagens.

Potential impact of this research

The main objective of this research is to provide a teaching material for students in mathematics and related areas, on the theory of metric spaces. It is worth mentioning that this work is dedicated to studying Banach's Fixed Point Theorem and exploring the theory of metric spaces necessary for its understanding, highlighting the interconnection between this theory, the aforementioned theorem, its applications and the beauty of Mathematics. Among the applications explored are the viability of the Google search engine and the image compression process.

Este Ebook foi desenvolvido a partir da dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Campus de Rio Claro, sob orientação da Prof. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, em 2024.

Ao universo, pelas vibrações positivas.

Um dos aspectos infinitamente sedutor da Matemática é que os seus paradoxos mais espinhosos têm uma forma de florescer em teorias bonitas.
Philip Davis

Resumo

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, formulado e demonstrado pelo matemático polonês Stefan Banach, estabelece condições sob as quais uma função contínua de um espaço métrico completo em si mesmo possui pelo menos um ponto fixo, ou seja, um ponto que não é movido pela função. Este trabalho é dedicado a estudar esse teorema de ponto fixo e a explorar a teoria de espaços métricos necessária ao seu entendimento, destacando a interconexão entre essa teoria, o referido teorema e suas aplicações. Temos também como objetivo apresentar a beleza e a aplicabilidade da teoria de espaços métricos a estudantes de graduação em Matemática e/ou entusiastas da área, além de destacar a relevância do teorema em várias áreas do conhecimento. Três aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach são abordadas: um problema de existência de solução para uma equação não linear em $\mathbb{R}$, a relação entre o teorema e o buscador do Google e a relação entre o teorema e o processo de compressão de imagens.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Sequências de Cauchy. Espaços Métricos Completos. Contração. Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Abstract

The Banach Fixed Point Theorem, formulated and proved by Polish mathematician Stefan Banach, establishes conditions under which a continuous function of a complete metric space in itself has at least one fixed point, that is, a point that is not moved by the function. This work is dedicated to studying this fixed point theorem and exploring the theory of metric spaces necessary for its understanding, highlighting the interconnection between this theory, the aforementioned theorem and its applications. We also aim to present the beauty and applicability of the theory of metric spaces to undergraduate Mathematics students and/or enthusiasts in the area, in addition to highlighting the relevance of the theorem in various areas of knowledge. Three applications of Banach's Fixed Point Theorem are addressed: a problem of existence of a solution for a non-linear equation in $\mathbb{R}$, the relationship between the theorem and the Google search engine and the relationship between the theorem and the compression process of images.

Keywords: Metric Spaces. Cauchy Sequences. Complete Metric Spaces. Contraction. Banach Fixed-Point Theorem.

Lista de Figuras

2.1 Desigualdade triangular. 15
2.2 Comparação entre as métricas d, d' e d''. 17
2.3 Comparação entre d, d' e d''. 18
2.4 Gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, o gráfico de f foi esboçado em azul e o de g em vermelho. 19

7.1 Ilustração de um ponto fixo de $f : M \to M$. 61
7.2 Pontos fixos da função $f(x) = x^2$. 62
7.3 Pontos fixos da função $f(x) = x^3$. 62
7.4 Ponto fixo da função $f(x) = \cos(x)$. 63
7.5 Ponto fixo da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. 63

8.1 Ponto fixo da função $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + 1$, representado pela interseção dos gráficos de f e $g(x) = x$. 69
8.2 Páginas conectadas por links. 70
8.3 Triângulo de Sierpinski. 73

Sumário

1 Introdução **12**

2 Espaços Métricos **14**
2.1 Definição e exemplos 14
2.2 Bolas, esferas e conjuntos limitados 26

3 Funções contínuas **30**

4 Alguns conceitos topológicos **34**
4.1 Conjuntos abertos 34
4.2 Conjuntos fechados 38

5 Sequências **44**
5.1 Definição e resultados básicos 44
5.2 Continuidade e sequências 48
5.3 Sequências de Cauchy 49
5.3.1 Continuidade uniforme e sequências de Cauchy 51
5.4 Particularidades de sequências de números reais 53

6 Espaços métricos completos e espaços de Banach **56**
6.1 Espaços métricos completos 56
6.2 Espaço de Banach 60

7 Teorema do Ponto Fixo de Banach **61**
7.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach 64
7.2 Nota sobre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer 66

8 Algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach **68**
8.1 Uma aplicação na reta 68
8.2 Aplicação ao algoritmo de classificação de páginas do Google 69
8.3 Aplicação no processo de compressão de imagens 72

9 Considerações finais **75**

Referências **76**

1 Introdução

O Teorema do Ponto Fixo de Banach estabelece condições nas quais uma função definida em um espaço métrico completo possui um ponto fixo, ou seja, um ponto que não se move após a aplicação da função. Essencialmente, ele fornece uma maneira rigorosa de garantir que certos tipos de equações e sistemas tenham soluções, mesmo que as equações sejam complexas ou difíceis de resolver diretamente.

São várias as aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Na Análise Matemática, esse teorema é uma ferramenta importante para estabelecer a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, parciais, funcionais, equações integrais e problemas de valor de contorno [7, 12]. Além disso, ele também tem aplicação em problemas de Otimização. Em Matemática Aplicada, o Teorema do Ponto Fixo de Banach é usado para demonstrar a existência de soluções em problemas práticos de Engenharia, Ciências da Computação, Economia e Biologia. Ele pode ser usado na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos e na solução numérica de equações não lineares, tornando-se uma ferramenta poderosa para simulação [5, 6, 12, 14, 15]. Sua aplicabilidade transcende os limites da Matemática Pura e se estende a uma variedade de áreas do conhecimento, contribuindo para o avanço da ciência e da resolução de problemas do mundo real.

Este trabalho dedica-se ao Teorema do Ponto Fixo de Banach e a algumas de suas aplicações. Mencionamos acima que o referido teorema lida com espaços métricos completos. Pois bem, nosso objetivo principal é mostrar a beleza e a aplicabilidade da teoria de espaços métricos para leitores que sejam estudantes de cursos de graduação em Matemática e/ou apaixonados por Matemática. Por essa razão, abordamos todos os tópicos dessa teoria que são necessários para compreender as aplicações e, principalmente, o teorema. Mais precisamente, construímos o texto de forma que o leitor perceba que toda a teoria desenvolvida está interligada ao teorema e às aplicações.

O texto está organizado como segue.

- **No Capítulo 2,** apresentamos as definições de métrica, espaço métrico, além de exemplos para ilustrar cada conceito. Também definimos bolas, esferas e conjuntos limitados em espaços métricos.
- **No Capítulo 3,** exibimos o conceito de função contínua entre espaços métricos, exemplos e algumas propriedades de funções que têm essa propriedade.
- **No Capítulo 4,** os conceitos de conjuntos abertos e fechados são introduzidos, além de resultados referentes a eles.
- **No Capítulo 5,** o conceito de sequência é explorado. Estudamos a relação entre limites de sequências e funções contínuas estabelecida pelo Critério Sequencial e também a definição e exemplos de sequências de Cauchy.

- **No Capítulo 6,** após estudarmos as preliminares necessárias, abordamos os espaços métricos completos e os espaços de Banach.
- **O Capítulo 7** destina-se ao Teorema do Ponto Fixo de Banach, sua prova e contextualização. Nele também apresentaremos uma pequena nota sobre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.
- **Com o Capítulo 8**, finalizamos o trabalho, com o intuito de cumprir nosso propósito, exibindo aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach e, com elas, objetivando mostrar a importância da teoria de espaços métricos não só para a Matemática Pura.

As figuras presentes no texto, especificamente as que elaboramos, foram feitas usando pacotes do TikZ e GeoGebra.

2 Espaços Métricos

A noção de distância entre dois pontos é fundamental no Cálculo, na Análise Matemática e na Geometria, assim como conceitos que derivam da noção de distância, como o de vizinhança de um ponto, limite, função contínua em um ponto, função derivável em um ponto, dentre muitos outros [4]. Desse modo, parece razoável que a generalização de conceitos do Cálculo, da Análise Matemática e da Geometria conte com uma generalização do conceito de distância que independa da natureza dos conjuntos em consideração.

Um espaço métrico é um conjunto com uma noção de distância entre seus elementos, geralmente chamados de pontos. A distância é medida por uma função denominada métrica ou função distância. Os espaços métricos são a configuração mais geral para estudar muitos dos conceitos de Análise matemática e Geometria.

Neste capítulo, vamos apresentar a definição formal de espaços métricos e alguns exemplos. Também veremos os conceitos de bolas, esferas e conjuntos limitados em espaços métricos. Para elaborá-lo, usamos as referências [4, 9, 12] e [13].

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1 (Métrica)**.** Uma **métrica** num conjunto M não-vazio é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$, um único número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

(M1) $d(x, x) = 0$ (a distância de um ponto a si mesmo é zero);

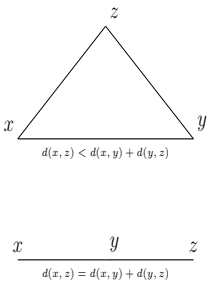
(M2) se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$ (positividade);

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);

(M4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Os axiomas (M1) e (M2) dizem que $d(x, y) \geqslant 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A condição (M3) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica de variáveis x e y. Por fim, a condição (M4) chama-se desigualdade triangular; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois. Veja a seguir uma ilustração da desigualdade triangular.

Figura 2.1: Desigualdade triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Definição 2.2 (Espaço Métrico)**.** Um **espaço métrico** é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.

Em alguns momentos, nos referiremos a M como simplesmente "*espaço métrico* M", ficando subentendido qual é a métrica d que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre de pontos de M.

Vejamos a seguir alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.3. Um dos exemplos mais importantes de espaço métrico é o conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, a reta. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$, onde $|\cdot|$ denota a função valor absoluto em $\mathbb{R}$. Os axiomas (M1) a (M4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Assim, esta é chamada **métrica usual** da reta. É a ela a quem nos referiremos sempre que considerarmos $\mathbb{R}$ como espaço métrico.

Exemplo 2.4 (Métrica zero-um ou discreta)**.** Qualquer conjunto M pode ser um espaço métrico de maneira muito simples. Com efeito, basta definir a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$, sendo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$, a qual é chamada de **métrica zero-um** ou **discreta**.

Note que os axiomas (M1) a (M3) são facilmente verificados. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, trivial, embora seja muitas vezes usado como contraexemplo (veja [9]). Para verificar que (M4) (desigualdade triangular) vale, basta analisarmos as possibilidades para $x, y, z \in M$ quaisquer. Faremos isso a seguir.

(i) Se $x = z$, então $d(x, z) = 0 \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, pois $d(x, y) \geqslant 0$ e $d(y, z) \geqslant 0$ (pela definição de d).

(ii) Se $x \neq z$, então $d(x, z) = 1$.

(ii-1) Se $y = x$ então $y \neq z$. Assim, $d(x,y) = 0$ e $d(y,z) = 1$ e, portanto,

$$d(x,z) = 1 = 0 + 1 = d(x,y) + d(y,z).$$

(ii-2) Se $y = z$ então $y \neq x$. Assim, $d(y,z) = 0$ e $d(x,y) = 1$ e, portanto,

$$d(x,z) = 1 = 1 + 0 = d(x,y) + d(y,z).$$

(ii-3) Se $y \neq x$ e $y \neq z$, temos $d(x,y) = 1$ e $d(y,z) = 1$ e, portanto,

$$d(x,z) = 1 < 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z).$$

Exemplo 2.5 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$)**.** Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos:

- $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$ (métrica euclidiana),
- $d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (métrica da soma),
- $d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$ (métrica do máximo).

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são métricas. De fato, elas cumprem os axiomas (M1), (M2) e (M3). A prova de que a condição (M4) é satisfeita para d' e d'' é relativamente simples, e será realizada para d posteriormente (Observação 2.21). A título de ilustração, provaremos a seguir que a função d' é uma métrica em $\mathbb{R}^n$, ficando ao leitor interessado a tarefa de provar que d'' também é uma métrica e d cumpre (M1), (M2) e (M3).

Afirmação: A função d' é uma métrica.

Para provar a afirmação, devemos mostrar que d' satisfaz as condições (M1), (M2), (M3) e (M4). Para isso, tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ de forma arbitrária.

▷ *Verificação de* (M1)*:*

$$d'(x,x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i| = 0.$$

▷ *Verificação de* (M2)*:* Se $x \neq y$, existe pelo menos um $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j \neq y_j$. Assim,

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geqslant |x_j - y_j| > 0,$$

pois $|x_i - y_i| \geqslant 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

▷ *Verificação de* (M3)*:*

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d'(y,x).$$

▷ *Verificação de* (M4)*:* Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$|x_i - z_i| \leqslant |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|,$$

ou seja,

$$d'(x,z) \leqslant d'(x,y) + d'(y,z),$$

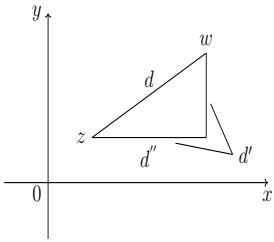
concluindo a prova da afirmação.

A métrica d provém da fórmula para distância entre dois pontos do plano cartesiano, ela é chamada de métrica euclidiana. Evidentemente, para considerações de natureza geométrica, d é a métrica natural, pois fornece a distância da geometria euclidiana.

Uma interpretação intuitiva para a métrica d' pode ser obtida para o caso $n = 2$, imaginando que o plano $\mathbb{R}^2$ é a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Então, o menor caminho ligando $z = (z_1, z_2)$ a $w = (w_1, w_2)$ através das ruas tem comprimento igual a $d'(z,w) = |z_1 - z_2| + |w_1 - w_2|$.

A figura abaixo ilustra a comparação entre as distâncias $d(z,w)$, $d'(z,w)$ e $d''(z,w)$ em $\mathbb{R}^2$, onde $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$.

Figura 2.2: Comparação entre as métricas d, d' e d''.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

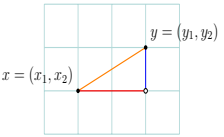
O resultado seguinte fornece uma comparação entre as métricas d, d' e d''.

Proposição 2.6. *Sejam d, d' e d'' as métricas definidas no Exemplo 2.5. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d''(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant n \cdot d''(x,y).$$

Para $n = 2$, isto é, em $\mathbb{R}^2$, temos a representação geométrica:

Figura 2.3: Comparação entre d, d' e d''.



$$d'' \leqslant d \leqslant d' = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leqslant 2d''$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(i) $d''(x,y) \leqslant d(x,y)$. De fato, como

$$d''(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| = |x_j - y_j|$$

para um certo $j \in \{1, \ldots, n\}$, segue que

$$d''(x,y) = |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2}.$$

Porém, como

$$\sqrt{(x_j - y_j)^2} \leqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

concluímos que $d''(x,y) \leqslant d(x,y)$.

(ii) $d(x,y) \leqslant d'(x,y)$. Note que

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \\ &\leqslant \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + 2\sum_{i \neq j}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = d'(x,y), \end{aligned}$$

provando que $d(x,y) \leqslant d'(x,y)$.

(iii) $d'(x,y) \leqslant n \cdot d''(x,y)$. Note que

$$|x_j - y_j| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| + \cdots + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \\ &= n \cdot d''(x,y). \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), obtemos $d''(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant n \cdot d''(x,y)$, como queríamos demonstrar. □

Observação 2.7. Quando não mencionarmos explicitamente que métrica estamos considerando em $\mathbb{R}^n$, fica subentendido que se trata da euclidiana. Por simplicidade podemos chamar as notações d, d' e d'', por d, em um determinado contexto.

Na sequência veremos mais um exemplo de espaço métrico e dois exemplos de funções que não definem métricas.

Exemplo 2.8 (Distância entre funções limitadas)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é limitada se existe uma constante (dependendo de f) $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant k$, para todo $x \in X$.

Seja $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$.[1]

É fácil verificar que a soma, a diferença e o produto de funções limitadas são também limitadas.

Seja

$$\rho\colon \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Afirmação: ρ está bem definida.

De fato, pois se f e g são limitadas, então $f - g$ é limitada e, por conseguinte, o $\sup(|f-g|)$ existe, onde $\sup(|f-g|)$ denota o supremo do conjunto $\{|f(x)-g(x)|\colon x \in X\}$.

Antes de mostrarmos que ρ é uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, vamos ilustrar ρ com um exemplo.

Exemplo: Sejam $X = [0,1]$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2, \quad x \in [0,1].$$

Queremos calcular $\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. Graficamente, temos:

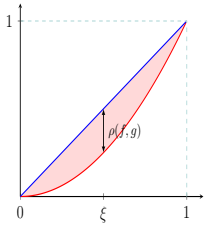


Figura 2.4: Gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, o gráfico de f foi esboçado em azul e o de g em vermelho.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

[1] O símbolo $\mathcal{B}$ é usado para denotar "*the* ***bounded*** *functions*"; a tradução da palavra *bounded* para o português é *limitada*.

Usando o fato de que a função $h(x) = |x - x^2|$ é contínua e $[0,1]$ é compacto $(*)$ e o fato de que $x - x^2 \geqslant 0$ para todo $x \in [0,1]$ $(**)$, obtemos

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |x - x^2| \overset{(*)}{=} \max_{x\in[0,1]} |x - x^2| \overset{(**)}{=} \max_{x\in[0,1]} x - x^2 \overset{(***)}{=} \frac{1}{4},$$

onde em $(***)$ usamos o fato de que o máximo da função $h(x) = x - x^2$ em $[0,1]$ ocorre em $\xi = 1/2$ e é, portanto, igual a $1/4$.

Vamos mostrar que ρ é uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Para isso, devemos verificar que as propriedades (M1), (M2), (M3) e (M4) são satisfeitas. Para tanto, consideremos $f, g, h \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ arbitrárias.

▷ Verificação de (M1):

$$\rho(f,f) = \sup_{x\in X} |f(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} |0| = 0.$$

▷ Verificação de (M2): se $f \neq g$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dessa forma,

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \geqslant |f(x_0) - g(x_0)| > 0.$$

▷ Verificação de (M3):

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |-(f(x) - g(x))| = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| = \rho(g,f).$$

▷ Verificação de (M4):

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |f(x) - h(x) + h(x) + g(x)|$$

$$\overset{(*)}{\leqslant} \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in X} |h(x) + g(x)| = \rho(f,h) + \rho(h,g),$$

onde em $(*)$ usamos o fato de que $\sup(\varphi + \psi) \leqslant \sup\varphi + \sup\psi$, para funções reais ϕ e ψ limitadas em $X \subseteq \mathbb{R}$.

A função ρ é chamada a **métrica da convergência uniforme** ou a **métrica do sup**.

Exemplo 2.9. A função $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = (x-y)^2$ não é uma métrica.

As condições (M1), (M2) e (M3) são satisfeitas, mas (M4) não é. Note que

$$d(-1,1) = 2^2 = 4;$$

$$d(-1,0) = (-1)^2 = 1;$$

$$d(0,1) = (-1)^2 = 1.$$

Daí,

$$d(-1,1) = 4 > 1 + 1 = d(-1,0) + d(0,1).$$

Como a desigualdade triangular não é satisfeita para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, concluímos que d não é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.10. A função $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ não é uma métrica.

As condições (M1), (M3) e (M4) são satisfeitas, mas (M2) não é. Com efeito, $d(1,-1) = |1^2-(-1)^2| = 0$. Como a positividade não é satisfeita para quaisquer $x, y\in\mathbb{R}$, concluímos que d não é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Observação 2.11. Nos Exemplos 2.9 e 2.10 vimos funções que satisfazem três condições que caracterizam uma métrica, mas não cumpre uma delas. A função d do Exemplo 2.9 não cumpre (M4), enquanto a função d do Exemplo 2.10 não cumpre (M2). O leitor pode estar curioso pensando em exemplos de funções que cumprem três condições, exceto (M1) ou (M3). Adiantamos que, para o primeiro caso, temos a função $d_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $d_1(x,y) = 1$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, pois $d_1(x,x) = 1 \neq 0$. E para o segundo caso, temos a função $d_2\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$d_2(x,y) = \begin{cases} x-y, & \text{se } x \geqslant y, \\ 1, & \text{se } x < y, \end{cases}$$

já que, por exemplo, $d(3,1) = 3-1 = 2 \neq 1 = d(1,3)$. Fica ao leitor interessado a tarefa de provar que as funções d_1 e d_2 cumprem as condições (M2), (M3) e (M4), e (M1), (M2) e (M4), respectivamente.

Definição 2.12 (Norma)**.** Seja V um espaço vetorial real. Uma norma em V é uma função real $\|\cdot\| : V\to\mathbb{R}$ que associa a cada $x\in V$, um único número real $\|x\|$, chamado de **norma de** x, e possui as seguintes propriedades:

(N1) $\|v\| \geqslant 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, com $v\in V$;

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, $\forall\, v\in V$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$; ($\|v\|$ é norma de vetor)
($|\lambda|$ denota o módulo do número real λ)

(N3) $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$, $\forall\, v, w\in V$.

Observe as implicações de (N2) e (N3).

$$\text{(N2) } \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \implies \begin{cases} \lambda = 0, v = 0 & \Rightarrow \quad \|0\| = 0 \\ \lambda = -1 & \Rightarrow \quad \|-v\| = \|v\|. \end{cases}$$

$$\text{(N3) } \|v+w\| \leqslant \|v\|+\|w\| \implies \begin{cases} w = -v & \Rightarrow \quad 0 = \|v+(-v)\| \leqslant \|v\| + \|-v\| = 2\|v\| \\ & \Rightarrow \quad \|v\| \geqslant 0,\ \forall\, v\in V, \quad \|v\| \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0. \end{cases}$$

Definição 2.13 (Espaço vetorial normado)**.** Um **espaço vetorial normado** é um par $(V, \|\cdot\|)$, onde V é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em V.

Frequentemente se designa o espaço vetorial normado somente por V, deixando a norma subentendida.

Proposição 2.14. *Seja V um espaço vetorial real. Uma norma $\|\cdot\|$ em V define uma métrica d em V dada por $d(x,y) = \|x-y\|$ para $x, y\in V$.*

Demonstração. Para provar que d é uma métrica, devemos mostrar que d satisfaz (M1), (M2), (M3) e (M4). Faremos isso na sequência. Sejam $x, y, z\in V$ arbitrários.

(M1) $d(x,x) = 0$. De fato,

$$d(x,x) = \|x-x\| = \|0\| \overset{\text{(N1)}}{=} 0.$$

(M2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$. Com efeito, se $x \neq y$, então $d(x,y) = \|x-y\| > 0$, por (N1).

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$. De fato,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|-y+x\| = \|(-1)(y-x)\| \overset{(N2)}{=} |-1|\cdot\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

(M4) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,x)$. Com efeito,

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| = \|(x-y)+(y-z)\|$$
$$\overset{(N3)}{\leqslant} \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \qquad \square$$

Da Proposição 2.14 segue que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico. A métrica assim definida é dita **proveniente da norma** $\|\cdot\|$ ou **induzida pela norma** $\|\cdot\|$.

Exemplo 2.15. Sabe-se que $\mathbb{R}^n$ com as operações:

$$\text{soma}: \quad x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \ldots, x_n+y_n)$$
$$\text{multiplicação por escalar}: \quad \lambda\cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$$

é um espaço vetorial. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\|x\| = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad \text{(norma euclidiana)}$$
$$\|x\|' = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \text{(norma da soma)}$$
$$\|x\|'' = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|. \qquad \text{(norma do máximo)}$$

Exceto (N3) para a norma euclidiana, as demais condições são de fácil verificação.

As métricas d, d' e d'' do Exemplo 2.5 (definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) são provenientes das normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$, respectivamente.

Exemplo 2.16. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$, apresentado no Exemplo 2.8. É fácil verificar que $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações de soma e multiplicação por escalar:

$$+: \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(X;\mathbb{R}), \quad (f,g) \mapsto f+g,$$
$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(X;\mathbb{R}), \quad (\alpha, f) \mapsto \alpha\cdot f.$$

Consideramos em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ a seguinte função:

$$\|\cdot\|_\infty: \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

A prova de que a função $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma usa ideias similares às usadas para mostrar que a função ρ do Exemplo 2.8 é uma métrica. Inclusive, ρ é proveniente da norma $\|\cdot\|_\infty$. Portanto, $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado.

Definição 2.17 (Produto interno)**.** Seja V um espaço vetorial real. Um **produto interno** em V é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$; $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$, que associa a cada par ordenado de vetores $x,y\in V$, um único número real $\langle x,y\rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x,x',y\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ arbitrários:

(C1) $\langle x+x',y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x',y\rangle$;

(C2) $\langle\lambda x,x'\rangle=\lambda\cdot\langle x,x'\rangle$;

(C3) $\langle x,x'\rangle=\langle x',x\rangle$;

(C4) $x\neq 0\implies\langle x,x\rangle>0$.

Note que das condições (C1), (C2) e (C3) derivam outras propriedades, tais como:

(P1) $\langle x,x'+y\rangle=\langle x,x'\rangle+\langle x,y\rangle$, pois

$$\langle x,x'+y\rangle\overset{(C3)}{=}\langle x'+y,x\rangle\overset{(C1)}{=}\langle x',x\rangle+\langle y,x\rangle\overset{(C3)}{=}\langle x,x'\rangle+\langle x,y\rangle.$$

(P2) $\langle x,\lambda x'\rangle=\lambda\langle x,x'\rangle$, uma vez que

$$\langle x,\lambda x'\rangle\overset{(C3)}{=}\langle\lambda x',x\rangle\overset{(C2)}{=}\lambda\langle x',x\rangle\overset{(C3)}{=}\lambda\langle x,x'\rangle.$$

(P3) $\langle 0,x'\rangle=0$, já que

$$\langle 0,x'\rangle=\langle 0\cdot x,x'\rangle\overset{(C2)}{=}0\cdot\langle x,x'\rangle=0.$$

Definição 2.18 (Espaço vetorial com produto interno)**.** Um espaço vetorial V com produto interno é um par $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ onde V é um espaço vetorial real e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em V.

Proposição 2.19. *Todo espaço vetorial com produto interno é um espaço normado. Ou seja, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em V, definimos uma norma em V por*

$$\|\ \|\colon V\to\mathbb{R},\qquad \|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}. \tag{2.1}$$

Note que $\|v\|^2=\langle v,v\rangle$. Neste caso, dizemos que a norma $\|\cdot\|$ é proveniente do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Para provar a Proposição 2.19, usaremos o resultado a seguir.

Lema 2.20 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial real com produto interno. Para todos $v,w\in V$, valem:*

$$|\langle v,w\rangle|\leqslant\|v\|\|w\|. \tag{C-S}$$

Demonstração. Se $v=0$, temos

$$|\langle 0,w\rangle|=0=\|0\|\|w\|,\quad\forall w\in V.$$

Suponha $v\neq 0$. Seja $\lambda=\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$.

Afirmação: $u=w-\lambda v$ é perpendicular a v, isto é, $\langle u,v\rangle=0$.

Com efeito, usando as propriedades (C1) e (C2), temos:

$$\langle u, v\rangle = \left\langle w - \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}v, v\right\rangle = \langle w, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}\|v\|^2 = \langle w, v\rangle - \langle v, w\rangle = 0 \qquad (2.2)$$

Como $w = u + \lambda v$, temos

$$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle \overset{(2.2)}{=} \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2$$

$$\therefore \lambda^2\|v\|^2 = \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2} \leqslant \|w\|^2 \quad \Rightarrow \quad \langle v, w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|.$$

□

Demonstração. (da Proposição 2.19) Para verificar que a função definida em (2.1) é uma norma, devemos mostrar que ela satisfaz (N1), (N2) e (N3). Para tanto, consideremos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários. Temos:

(N1) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geqslant 0$ (por (C4) e (P3)) e $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = 0 \Leftrightarrow v = 0$ por (P3).

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, pois

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot v| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} \\ &\overset{(C2)}{=} \sqrt{\lambda\langle v, \lambda v\rangle} \\ &\overset{(C3)}{=} \sqrt{\lambda\langle \lambda v, v\rangle} \\ &\overset{(C2)}{=} \sqrt{\lambda^2\langle v, v\rangle} \\ &= |\lambda| \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

(N3) Se $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ e $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$, então $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$. Com efeito,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle && \text{(definição)} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle && \text{(propriedades (C1) e (P1))} \\ &\leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| && \text{(definição de de módulo)} \\ &\leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| && \text{(C-S)} \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. && \text{(quadrado perfeito)} \end{aligned}$$

Como os valores em ambos os lados da desigualdade obtida acima são não negativos, extraímos a raiz quadrada de ambos, obtendo

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|.$$

□

O exemplo mais corriqueiro de espaço vetorial com produto interno é $\mathbb{R}^n$, onde se define, para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, o produto interno $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, ao qual nos referimos como *usual em* $\mathbb{R}^n$, *ou canônico.* A norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

introduzida no Exemplo 2.15 provém desse produto interno.

Observação 2.21. Com a prova de (N3) na Proposição 2.19, podemos concluir que vale (M4) para a métrica euclidiana d, introduzida no Exemplo 2.5. De fato, como d provém da norma euclidiana $\|\cdot\|$, que por sua vez provém do produto interno usual $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\| = \|x + y - y - z\| \\ &\overset{(N3)}{\leqslant} \|x + y\| + \|y - z\| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Observação 2.22. Quando uma norma provém de um produto interno, vale a lei do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

que decorre imediatamente da definição $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$ e das propriedades de produto interno (Definição 2.17). Porém, nem toda norma provém de um produto interno. Por exemplo, a norma da soma $\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ em $\mathbb{R}^n$ não provém de um produto interno porque ela não cumpre a lei do paralelogramo. Com efeito, considere $n = 2$, $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$. Temos

$$\|u + v\|_s^2 + \|u - v\|_s^2 = 8,$$

enquanto que

$$2(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2) = 4.$$

Exemplo 2.23 (Subespaço; métrica induzida)**.** Seja (M, d) um espaço métrico. Todo subconjunto não vazio $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como um espaço métrico, basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuem como elementos de M. Quando isso é feito, S chama-se um **subespaço** de M e a métrica de S diz-se **induzida pela de** M. Essa ideia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 2.24 (O produto cartesiano de dois espaços métricos é um espaço métrico)**.** Sejam M_1 e M_2 espaços métricos, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d. O produto cartesiano $M_1 \times M_2$ é, como conjunto, formado pelos pares ordenados $z = (x, y)$, onde $x \in M_1$ e $y \in M_2$. Podemos dotar o produto $M_1 \times M_2$ de uma métrica, definindo a distância de $z = (x, y)$ a $z' = (x', y')$ por:

$$d'(z, z') = d(x, x') + d(y, y'),$$

ou

$$d''(z, z') = \max\{d(x, x'), d(y, y')\},$$

ou ainda

$$d(z, z') = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}.$$

A generalização para um produto de n fatores é imediata, como veremos abaixo.

Exemplo 2.25. Dados espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d, o produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é o conjunto das listas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$. Com qualquer uma das três métricas definidas a seguir, M é um espaço métrico.

- $d''(x,y) = \max\{d(x_1,y_1),\ldots,d(x_n,y_n)\}$;
- $d'(x,y) = d(x_1,y_1)+\cdots+d(x_n,y_n)$;
- $d(x,y) = \sqrt{d(x_1,y_1)^2+\cdots+d(x_n,y_n)^2}$.

Além disso, para quaisquer $x, y \in M$, valem as desigualdades

$$d''(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant n \cdot d''(x,y),$$

significando que as três métricas, d, d' e d'', são equivalentes.

Quando $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = \mathbb{R}$, obteremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, como produto cartesiano de n cópias do espaço métrico $\mathbb{R}$.

2.2 Bolas, esferas e conjuntos limitados

Definição 2.26 (Bolas e esferas)**.** Sejam (M,d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$. Chamamos de:

- **Bola aberta** de centro $a \in M$ e raio $r > 0$ o conjunto:

$$B(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) < r\}.$$

- **Bola fechada** de centro $a \in M$ e raio $r > 0$ o conjunto:

$$B[a,r] = \{x \in M\colon\ d(x,a) \leqslant r\}.$$

- **Esfera** de centro $a \in M$ e raio $r > 0$ o conjunto:

$$S(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) = r\}.$$

Observe que $B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r)$, sendo a reunião disjunta.

Quando a métrica d provém de uma norma no espaço vetorial E, podemos escrever:

- $B(a,r) = \{x \in M\colon\ \|x-a\| < r\}$;
- $B[a,r] = \{x \in M\colon\ \|x-a\| \leqslant r\}$;
- $S(a,r) = \{x \in M\colon\ \|x-a\| = r\}$.

Exemplo 2.27. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta $B(a,r)$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois $|x-a| < r$ equivale a

$$-r < x-a < r, \quad \text{ou seja,} \quad a-r < x < a+r.$$

Analogamente, a bola fechada $B[a,r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera $S(a,r)$ tem apenas os pontos $a-r$ e $a+r$.

Exemplo 2.28. Sejam M um espaço métrico e $a \in M$. Suponha que M esteja munido da métrica zero-um (Exemplo 2.4). Vamos descrever $B(a,r)$, $B[a,r]$ e $S(a,r)$ para $r > 1$, $r < 1$ e $r = 1$.

Sabendo que $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$, analisemos as possibilidades.

▷ Para $r = 1$, temos:

- $B(a,1) = \{x \in M\colon\ d(x,a) < 1\} = \{a\}$;
- $B[a,1] = \{x \in M\colon\ d(x,a) \leqslant 1\} = M$;
- $S(a,1) = \{x \in M\colon\ d(x,a) = 1\} = M - \{a\}$.

▷ Para $r < 1$, temos:

- $B(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) < r < 1\} = \{a\}$;
- $B[a,r] = \{x \in M\colon\ d(x,a) \leqslant r < 1\} = \{a\}$;
- $S(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) = r < 1\} = \varnothing$.

▷ Para $r > 1$, como sempre ocorre $d(x,a) \leqslant 1 < r$, temos:

- $B(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) < r\} = M$;
- $B[a,r] = \{x \in M\colon\ d(x,a) \leqslant 1 < r\} = M$;
- $S(a,r) = \{x \in M\colon\ d(x,a) = r > 1\} = \varnothing$.

Os próximos resultados mostram que se M é um espaço métrico e $a, b \in M$, com $a \neq b$, existem bolas abertas e fechadas centradas nesses pontos que são disjuntas. Ou seja, é possível *separar* a e b com bolas abertas ou fechadas.

Proposição 2.29. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dados $a \neq b \in M$, sejam $r, s > 0$ tais que $r + s \leqslant d(a,b)$. Então,*

$$B(a,r) \cap B(b,s) = \varnothing.$$

Demonstração. Suponhamos que existe $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Então,

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) < r + s \leqslant d(a,b),$$

o que é absurdo. Logo, $B(a,r) \cap B(b,s) = \varnothing$. □

Proposição 2.30. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dados $a \neq b \in M$, sejam $r, s > 0$ tais que $r + s < d(a,b)$. Então,*

$$B[a,r] \cap B[b,s] = \varnothing.$$

Demonstração. Se $x \in B[a,r] \cap B[b,s]$, então

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) \leqslant r + s < d(a,b),$$

o que é absurdo. Logo, $B[a,r] \cap B[b,s] = \varnothing$. □

A seguir veremos os conceitos de ponto isolado e conjunto discreto, além de exemplos que ilustram tais definições.

Definição 2.31 (Pontos isolados)**.** Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $a \in M$ é um **ponto isolado** quando existe algum $r > 0$ tal que $B(a,r) = \{a\}$, ou seja, o próprio ponto a é uma bola aberta em M.

Observação 2.32. Por definição, a não é ponto isolado se, para qualquer $r > 0$, existir $x \in M$ tal que $0 < d(x,a) < r$.

Exemplo 2.33. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Todo ponto de $\mathbb{Z}$ é isolado.

De fato, tomando $r = 1/2 > 0$, temos

$$B\left(a, \frac{1}{2}\right) = \{a\}, \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 2.34. Seja $\overline{P} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\} = \{0\} \cup \{1/n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$.

Afirmação: $0 \in \overline{P}$ não é ponto isolado.

Com efeito, dado qualquer $r > 0$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/r$. Daí,

$$\frac{1}{n_0} < r \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n_0} \in B(0, r) = (-r, r).$$

Definição 2.35 (Conjunto discreto)**.** Um subespaço X de um espaço métrico (M, d) chama-se **discreto** quando todo ponto de X é isolado.

Pelo Exemplo 2.33, obtemos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.36. $\mathbb{Z}$ é discreto.

Exemplo 2.37. Seja E um espaço vetorial normado diferente de $\{0\}$. Nenhum ponto de E é isolado. De fato, dados $a \in E$ e $r > 0$, mostraremos que a bola $B(a, r)$ contém um vetor $x \in E$, $x \neq a$. Como $E \neq \{0\}$, seja $y \neq 0$ em E. Tomando

$$z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} \in E,$$

temos

$$0 < \|z\| = \left\|\frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{r}{2} < r.$$

Portanto, tomando $x = a + z$, temos que $x \in E$ e $0 < \|x - a\| = \|z\| < r$, provando que a não é ponto isolado.

Definição 2.38 (Conjunto limitado)**.** Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $X \subseteq M$ é um **conjunto limitado** se existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \leqslant c$, para quaisquer $x, y \in X$.

Se X é limitado e não-vazio, podemos definir o **diâmetro** de X como sendo

$$\operatorname{diam} X = \sup\{d(x, y)\colon x, y \in X\}.$$

Note que $\operatorname{diam} X$ está bem definido porque o conjunto $\{d(x, y)\colon x, y \in X\}$ é não-vazio e limitado superiormente.

Observação 2.39. Sejam (M, d) um espaço métrico e $X, Y \subset M$. Se X é limitado e $Y \subset X$, então Y também é limitado e $\operatorname{diam}(Y) \leqslant \operatorname{diam}(X)$. De fato, se X é limitado, existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \leqslant c$ para quaisquer $x, y \in X$. Sejam $x_0, y_0 \in Y$ arbitrários. Como $Y \subset X$, temos $x_0, y_0 \in X$. Portanto, $d(x_0, y_0) \leqslant c$, o que prova que Y também é limitado. Além disso, por propriedade de supremo[2], segue que

$$\sup\{d(x_0, y_0) : x_0, y_0 \in Y\} \leqslant \sup\{d(x, y)\colon x, y \in X\},$$

ou seja,

$$\operatorname{diam}(Y) \leqslant \operatorname{diam}(X).$$

[2]Se $A \subset B$ então $\sup A \leqslant \sup B$.

Exemplo 2.40. Seja (M,d) um espaço métrico. Todo subconjunto finito de M é limitado.

Com efeito, seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um subconjunto finito de M. Considerando $c = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} d(x_i,x_j)$, temos que

$$d(x_i,x_j) \leqslant c, \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\},$$

de onde segue que X é limitado.

Exemplo 2.41. Toda bola aberta $B(a,r)$ num espaço métrico (M,d) é um conjunto limitado. Além disso, $\operatorname{diam} B(a,r) \leqslant 2r$.

De fato, se $x,y \in B(a,r)$, então

$$d(x,y) \overset{(M4)}{\leqslant} d(x,a) + d(a,y) < 2r \quad \Rightarrow \quad \operatorname{diam} B(a,r) \leqslant 2r.$$

De forma análoga, toda bola fechada $B[a,r]$ é um conjunto limitado e $\operatorname{diam} B[a,r] \leqslant 2r$.

Vamos finalizar este capítulo mostrando que o conjunto formado pela união de dois conjuntos limitados é limitado.

Proposição 2.42. *Se X e Y são conjuntos limitados em um espaço métrico (M,d), então $X \cup Y$ também é um conjunto limitado em M.*

Demonstração. Se $X = \varnothing$ ou $Y = \varnothing$, não há o que provar. Supondo $X \neq \varnothing$ e $Y \neq \varnothing$, vamos considerar $a \in X$ e $b \in Y$ pontos fixados. Como X e Y são limitados, existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$d(x,a) \leqslant c_1, \quad \forall x \in X$$

e

$$d(y,b) \leqslant c_2, \quad \forall y \in Y.$$

Então, pondo $c = c_1 + c_2 + d(a,b)$, concluímos que, para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários, vale

$$d(x,y) \overset{(M4)}{\leqslant} d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leqslant c_1 + d(a,b) + c_2 = c,$$

provando que $X \cup Y$ é um conjunto limitado. □

3 Funções contínuas

Neste capítulo, que teve como principal referência [9], faremos uma exposição breve sobre funções contínuas entre espaços métricos. Veremos a definição de continuidade, além de alguns exemplos de funções contínuas e uma importante propriedade.

Vamos considerar M e N espaços métricos dotados das métricas d_M e d_N, respectivamente, e $f\colon M \to N$ uma função.

Intuitivamente, uma função é contínua quando pequenas variações no domínio da função ocasionam pequenas variações na imagem. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 3.1 (Função contínua)**.** Dizemos que $f\colon M \to N$ é **contínua em** $a \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in M,\ d_M(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Em símbolos, temos que se $f\colon M \to N$ é contínua em $a \in M$, então

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \mid \forall\, x \in M,\ d(x,a) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Equivalentemente, dizemos que $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ é **contínua em** $a \in M$ se, para toda bola aberta $B(f(a), \epsilon)$ de centro $f(a)$ e raio $\epsilon > 0$, existe uma bola aberta $B(a, \delta)$ de centro a e raio $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \epsilon). \tag{3.1}$$

A equivalência entre as definições explicitadas acima se justifica da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} d_M(x,a) < \delta & \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} & d_N(f(x), f(a)) < \epsilon \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x \in B(a,\delta) & \overset{(3.1)}{\Rightarrow} & f(x) \in B(f(a), \epsilon). \end{array}$$

Se f é contínua em qualquer ponto $a \in M$, dizemos simplesmente que f **é contínua**.

Exemplo 3.2. Se $f\colon M \to N$ é uma função constante, isto é, existe $b \in N$ tal que $f(x) = b$ para todo $x \in M$, então f é contínua.

De fato, tome $a \in M$ arbitrariamente. Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ qualquer, obtemos

$$d_M(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(a)) < \epsilon,$$

pois $d_N(f(x), f(a)) = d_N(b,b) = 0$.

Definição 3.3 (Função lipschitziana)**.** Dada $f\colon M \to N$, se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_M(x, y), \quad \forall\, x, y \in M,$$

dizemos que f é uma **função lipschitziana**. A constante $c > 0$ é chamada constante de Lipschitz.

Em particular, se $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma **imersão isométrica**.

Definição 3.4 (Contração)**.** Dada $f\colon M \to N$, se existe uma constante $c \in (0, 1)$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_M(x, y), \quad \forall\, x, y \in M,$$

dizemos que f é uma **contração**.

Claramente, toda contração é uma função lipschitziana.

O conceito de contração será fundamental para o estudo do Teorema do Ponto Fixo de Banach, no Capítulo 7. Por essa razão, exibiremos dois exemplos simples de contração para compreendermos melhor essa definição. O segundo exemplo será referenciado no Capítulo 8.

Exemplo 3.5. Consideremos $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x/3$. Afirmamos que f é uma contração. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3} \cdot d(x, y).$$

Assim, f é uma contração com $c = 1/3$.

Exemplo 3.6. Consideremos $\mathbb{R}^2$ com a métrica d induzida pela norma da soma, ou seja, $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$T(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + (a, b) = \left(\frac{x}{2} + a, \frac{y}{2} + b\right), \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor fixo de $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que T é uma contração. Com efeito, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} d(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)) &= \left\| \left(\frac{x_1}{2} + a, \frac{y_1}{2} + b\right) - \left(\frac{x_2}{2} + a, \frac{y_2}{2} + b\right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma contração com $c = 1/2$.

Exemplo 3.7. Toda função lipschitziana é contínua e, portanto, toda contração é contínua.

Com efeito, tome $a \in M$ arbitrariamente. Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$, obtemos

$$d_M(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_M(f(x), f(a)) < c \cdot d_M(x, a) < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Exemplo 3.8. A função identidade $f\colon M \to M$, $f(x) = x$, é uma imersão isométrica e, pelos Exemplos 3.3 e 3.7, é contínua.

Exemplo 3.9. Se $I \subset \mathbb{R}$ é aberto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ tem derivada limitada, então f é lipschitziana.

De fato, seja $K > 0$ tal que $|f'(z)| \leqslant K$ para todo $z \in I$. Dados $x, y \in I$, $x < y$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in [x, y]$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K \cdot |x - y|.$$

Sendo x, y arbitrários, concluímos que f é lipschitziana, com constante de Lipschitz K.

Exemplo 3.10. A função $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, é lipschitziana se X é limitado.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, existe $d > 0$ tal que

$$|x| \leqslant d, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daí, dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, temos

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leqslant (|x| + |y|)|x - y| \leqslant 2d \cdot |x - y|,$$

de onde segue que f é lipschitziana com constante de Lipschitz $c = 2d$.

Exemplo 3.11 (Continuidade em espaços discretos)**.** Se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda função $f\colon M \to N$ é contínua no ponto a.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) = \{a\}$. Então,

$$d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad x = a \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(a)) = 0 < \epsilon.$$

Por conseguinte, se M é discreto, toda função $f\colon M \to N$ é contínua. Assim, por exemplo, toda função $f\colon \mathbb{Z} \to N$ é contínua.

Observação 3.12. Dizemos que $f\colon M \to N$ é **descontínua** em a quando f não é contínua em a. Isto significa que existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geqslant \epsilon$. Uma formulação equivalente, que às vezes é útil, é a seguinte: existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, pode-se obter $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geqslant \epsilon$.

Um exemplo popular de descontinuidade é o da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta função é descontínua no ponto 0. De fato, para $\epsilon = 1/2$, podemos tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2/(2n+1)\pi$. Então, $\operatorname{sen}(1/x_n) = \pm 1$ e, portanto,

$$|x_n - 0| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(0)| = 1 > \epsilon.$$

A próxima propriedade será importante para alguns resultados e aplicações dos dois últimos capítulos e por isso se faz presente aqui. Vamos considerar $N = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, no qual consideraremos a métrica induzida por uma norma, sendo essa norma qualquer uma das três apresentadas no Exemplo 2.15[1].

[1]Podemos considerar qualquer norma em $\mathbb{R}^n$, porque em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes e a definição de continuidade independe da norma. Para entender essa justificativa, indicamos ao leitor a referência [11].

Proposição 3.13. *Se $f, g\colon M \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas em $a \in M$, então $f \pm g\colon M \to \mathbb{R}^n$ também é contínua em a.*

Demonstração. Como $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in M$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in M,\ d_M(x,a) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Da mesma forma, como $g\colon M \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in M$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in M,\ d_M(x,a) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \|g(x) - g(a)\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, por (3.2) e (3.3), obtemos

$$x \in M,\ d_M(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) \pm g(x) - (f(a) \pm g(a))\| \leqslant$$

$$\|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de onde segue que $f \pm g$ é contínua em $a \in M$. □

Finalizaremos este capítulo provando que a composta de funções contínuas é uma função contínua e constatando que a restrição de uma função contínua também é uma função contínua. A seguir, P denotará um espaço métrico dotado de uma métrica d_P.

Proposição 3.14 (Composição de funções contínuas)**.** *Se $f\colon M \to N$ é contínua em $a \in M$ e se $g\colon N \to P$ é contínua em $f(a) \in N$, então a composição*

$$g \circ f\colon (M, d_M) \to (P, d_P), \quad x \mapsto g(f(x))$$

é contínua em $a \in M$.

Demonstração. (1) Como $g\colon N \to P$ é contínua em $f(a) \in N$, temos que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \lambda > 0 \mid \forall\, y \in N,\ d_N(y, f(a)) < \lambda \quad \Rightarrow \quad d_P(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

(2) Adicionalmente, como $f\colon M \to N$ é contínua em $a \in M$, temos

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \mid \forall\, x \in M,\ d_M(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

(3) Em (2), tome $\epsilon = \lambda$ proveniente de (1). Depois, em (1), tome $y = f(x)$. Dessa forma,

$$\forall\, x \in M,\ d_M(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(a)) < \lambda \quad \Rightarrow \quad d_P(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon,$$

de onde segue o resultado.

□

Corolário 3.15 (Restrição de funções contínuas)**.** *Toda **restrição** de função contínua é uma função contínua. Mais precisamente, se $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ é contínua em $a \in A \subseteq M$ então $f_{|A}\colon (A, d_A) \to (N, d_N)$ é contínua em $a \in A$, onde d_A é a restrição de d_M ao conjunto A, ou seja, $d_A(x,y) = d_M(x,y)$, para quaisquer $x, y \in A$.*

Demonstração. Basta observar que $f_{|A} = f \circ i$, onde $i\colon A \hookrightarrow M$ é a função inclusão.

Cabe observar que a inclusão $i\colon A \hookrightarrow M$ é uma imersão isométrica, pois

$$d_M(i(x), i(y)) = d_M(x,y) = d_A(x,y), \quad \forall x, y \in A,$$

sendo, portanto, uma aplicação contínua em A (veja a Definição 3.3 e o Exemplo 3.7). □

4 Alguns conceitos topológicos

Neste capítulo veremos conceitos fundamentais de topologia em espaços métricos, como as noções de conjuntos abertos e fechados. A abordagem dada a este tema aqui presente está fundamentada nas referências [4] e [9].

Em todo este capítulo, M denotará um espaço métrico dotado de uma métrica d.

4.1 Conjuntos abertos

Definição 4.1 (Ponto interior)**.** Seja X um subconjunto de M. Dizemos que $a \in X$ é um **ponto interior** de X quando existe $r > 0$ tal que a bola aberta de raio r centrada em a está inteiramente contida em X, ou seja, quando $B(a,r) \subset X$. Equivalentemente, $a \in X$ é um ponto interior de X quando existe $r > 0$ tal

$$d(x,a) < r \quad \Rightarrow \quad x \in X.$$

Assim, um ponto $b \in X$ não é interior a X se, para todo $\epsilon > 0$, $B(b,\epsilon) \cap (M - X) \neq \varnothing$, em que $M - X$ denota o complementar de X em M. Em palavras, $b \in X$ não é interior a X se existir algum ponto que não pertence a X em toda bola aberta de centro b. O conjunto de todos os pontos interiores de X é denominado o **interior** de X e é, geralmente, denotado por $\text{int}(X)$ ou $\overset{\circ}{X}$.

Observação 4.2. Dado $X \subseteq M$, tem-se, sempre, $\text{int}(X) \subseteq X$, pela definição de ponto interior de X.

Definição 4.3 (Ponto de fronteira)**.** Seja X um subconjunto de M. Dizemos que um ponto $b \in M$ é um **ponto de fronteira** de X se toda bola aberta de centro b em M contém pelo menos um elemento de X e pelo menos um elemento de seu complementar $M - X$. Ou seja, $b \in M$ é um ponto de fronteira de X se, para todo $\epsilon > 0$, ocorre

$$B(b,\epsilon) \cap X \neq \varnothing \quad \text{e} \quad B(b,\epsilon) \cap (M - X) \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos de fronteira de X é denotado por ∂X e é chamado de **fronteira** de X. Note que, pela definição de ponto de fronteira, temos

$$\partial X = \partial (M - X).$$

Exemplo 4.4. Na reta, o interior do intervalo $[0,1)$ é o intervalo aberto $(0,1)$ e sua fronteira são os pontos 0 e 1.

De fato, se $a \in (0,1)$, ou seja, $0 < a < 1$, tomando $r = \min\{a, 1-a\}$, temos que $B(a,r) = (a-r, a+r) \subset (0,1)$, de onde segue que a é ponto interior de $(0,1]$.

Por outro lado, para todo $\epsilon > 0$, temos

$$(-\epsilon, \epsilon) \cap [0,1) = [0, \epsilon) \neq \varnothing \quad \text{e} \quad (-\epsilon, \epsilon) \cap (\mathbb{R} - [0,1)) = (-\epsilon, 0) \neq \varnothing,$$

permitindo-nos afirmar que $0 \in \partial[0,1)$. Da mesma forma, para todo $\epsilon > 0$, temos

$$(1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap [0,1) = (1-\epsilon, 1) \neq \varnothing \quad \text{e} \quad (1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap (\mathbb{R} - [0,1)) = [1, 1+\epsilon) \neq \varnothing,$$

de onde segue que $1 \in \partial[0,1)$.

Os únicos pontos pertencentes à fronteira de $[0,1)$ são 0 e 1, pois para qualquer outro número $a \in \mathbb{R}$, obtemos intervalos abertos centrados em a ou totalmente contidos em $[0,1)$ ou que não intersectam $[0,1)$.

Exemplo 4.5. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. O conjunto interior de $\mathbb{Q}$ é vazio, pois não existe intervalo aberto formado apenas por números racionais, haja vista que todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ possui números racionais e irracionais. Pela mesma razão, podemos afirmar que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Proposição 4.6. *Para todo $X \subseteq M$, tem-se*

$$M = \operatorname{int}(X) \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M - X).$$

Demonstração. É claro que $\operatorname{int}(X) \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M-X) \subset M$. Por outro lado, dado $x_0 \in M$, temos um dos seguintes casos (excludentes):

(i) existe uma bola aberta de centro x_0 contida em X e, neste caso, $x_0 \in \operatorname{int}(X)$;

(ii) existe uma bola aberta de centro x_0 contida em $M-X$ e, neste caso, $x_0 \in \operatorname{int}(M-X)$;

(iii) toda bola aberta de centro x_0 intersecta X e $M - X$ e, neste caso, $x_0 \in \partial X$.

Portanto, $x_0 \in \operatorname{int}(X) \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M-X)$. Logo, $M \subset \operatorname{int}(X) \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M-X)$, obtendo o resultado. □

Definição 4.7. Seja A um subconjunto de M. Dizemos que A é **aberto** em M se todos os seus pontos forem pontos interiores.

Equivalentemente, temos que A é aberto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \varnothing \Leftrightarrow$ para cada $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Essas equivalências ficarão mais claras com a prova da proposição seguinte.

Proposição 4.8. *$A \subseteq M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \varnothing$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se A é aberto em M, dado $x_0 \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$. Daí, como $B(x_0, \delta) \cap (M - A) = \varnothing$, concluímos que $x_0 \notin \partial A$. Portanto, $A \cap \partial A = \varnothing$.

($\Leftarrow$) Suponha $A \cap \partial A = \varnothing$. Tome $x_0 \in A$. Então $x_0 \notin \partial A$, o que por definição significa que existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset A \quad \text{ou} \quad B(x_0, \delta) \subset (M - A).$$

O segundo caso não pode ocorrer pois $x_0 \in A$. Portanto, vale o primeiro, ou seja, $B(x_0, r) \subset A$, de onde concluímos que $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ e A é aberto em M, posto que x_0 foi tomado arbitrariamente em A. □

Observação 4.9. O intervalo $[0,1)$ não é um conjunto aberto, conforme podemos constatar pelo Exemplo 4.4. Observe que $[0,1) \cap \partial[0,1) = \{0\} \neq \varnothing$. Portanto, a Proposição 4.8 garante a veracidade da afirmação feita.

Exemplo 4.10. Uma bola aberta $B(a,r)$ em M é um conjunto aberto.

De fato, seja $x \in B(a,r)$. Então $d(a,x) < r$ e, portanto, $s = r - d(a,x) > 0$.

Afirmação: $B(x,s) \subset B(a,r)$.

Com efeito, se $y \in B(x,s)$, então $d(x,y) < s$ e, consequentemente,

$$d(a,y) \overset{(M4)}{\leqslant} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r,$$

provando que $y \in B(a,r)$.

Pela afirmação, podemos inferir que $x \in \operatorname{int} B(a,r)$. Sendo x arbitrário em $B(a,r)$, concluímos que $B(a,r)$ é um conjunto aberto.

Proposição 4.11. *Seja $\wp(M)$ o conjunto das partes de M, ou seja, $\wp(M) = \{X\colon\ X \subseteq M\}$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \operatorname{int}\colon \wp(M) &\to \wp(M) \\ A &\mapsto \operatorname{int}(A) \end{aligned}$$

é tal que:

(a) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$;

(b) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B)$ *(monótona);*

(c) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$ *(idempotente).*

Demonstração. ▷ *Prova de* (a). Segue da definição de ponto interior, veja a Observação 4.2.

▷ *Prova de* (b). Seja $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ arbitrário. Então, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0,\delta) \subset A$. Uma vez que $A \subset B$, temos $B(x_0,\delta) \subset B$ e, portanto, $x_0 \in \operatorname{int}(B)$, provando a inclusão desejada.

▷ *Prova de* (c). Pelo item (a), segue imediatamente que $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(A)$. Resta-nos demonstrar que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$.

Dado qualquer $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0,\delta) \subset A$. Mostraremos que $B(x_0,\delta) \subset \operatorname{int}(A)$. Pelo Exemplo 4.10, dado qualquer $x \in B(x_0,\delta)$, existe $\eta > 0$ tal que $B(x,\eta) \subset B(x_0,\delta)$. Como $B(x_0,\delta) \subset A$ e $B(x_0,\delta) = \operatorname{int}(B(x_0,\delta))$ pelo Exemplo 4.10, segue por (b) que

$$B(x_0,\delta) = \operatorname{int}(B(x_0,\delta)) \subset \operatorname{int}(A),$$

de onde segue que $B(x,\eta) \subset \operatorname{int}(A)$, já que $B(x,\eta) \subset B(x_0,\delta)$. Assim, $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. □

Observação 4.12. Em virtude do item (a) da Proposição 4.11, dado um espaço métrico (M,d) qualquer, a fim de demonstrar que um conjunto $A \subset M$ é aberto, basta mostrar que $A \subset \operatorname{int}(A)$. Cabe também observar que o item (c) atesta que $\operatorname{int}(A)$ é um conjunto aberto.

Observe que o conjunto de todos os abertos de um espaço métrico (M,d), que denotaremos por $\operatorname{Open}(M,d)$, contém sempre os conjuntos $\varnothing$ e M, bem como é fechado sob algumas operações de conjuntos: interseção finita e reunião qualquer, conforme provaremos a seguir.

Teorema 4.13. *Seja $\mathrm{Open}(M,d)$ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de M, isto é:*

$$\mathrm{Open}(M,d) = \{A \subseteq M\colon\ \mathrm{int}(A) = A\}.$$

$\mathrm{Open}(M,d)$ tem as seguintes propriedades:

(A1) $M, \varnothing \in \mathrm{Open}(M,d)$.

(A2) *Se I é um conjunto de índices qualquer e $\{A_i\colon i \in I\} \subseteq \mathrm{Open}(M,d)$, então:*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathrm{Open}(M,d).$$

(A3) *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathrm{Open}(M,d)$, então:*

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathrm{Open}(M,d).$$

Demonstração. ▷ *Prova de* (A1). É claro que $M \in \mathrm{Open}(M,d)$, pois se $x_0 \in M$, então $B(x_0,\delta) = \{x \in M\colon\ d(x,x_0) < \delta\} \subset M$ para todo $\delta > 0$.

Verifiquemos que $\varnothing \in \mathrm{Open}(M,d)$. Se $\varnothing \notin \mathrm{Open}(M,d)$, então existe $x_0 \in \varnothing$ tal que $x_0 \notin \mathrm{int}(\varnothing)$, o que é impossível. Portanto, $\varnothing$ é aberto.

▷ *Prova de* (A2). Pela Observação 4.12, basta mostrarmos que, dado qualquer $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Mas, de fato, se $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, então existe algum $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como, por hipótese, A_{i_0} é aberto, existe algum $\delta_{i_0} > 0$ tal que $B(x,\delta_{i_0}) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Logo, $x \in \mathrm{int}(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

▷ *Prova de* (A3). Novamente, basta mostrarmos que:

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq\ \mathrm{int}\,(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\,.$$

Dado $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, tem-se $x \in A_1$, $x \in A_2$, …, $x \in A_n$.

Como cada $A_i, i \in \{1,\ldots,n\}$, é aberto, existem $\delta_i > 0, i \in \{0,\cdots,n\}$, tais que $B(x,\delta_1) \subset U_1$, $B(x,\delta_2) \subset A_2$, …, $B(x,\delta_n) \subset A_n$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\} > 0$, tem-se $B(x,\delta) \subset A_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e, portanto,

$$B(x,\delta) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Assim concluímos que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathrm{Open}(M,d)$. □

Para a próxima proposição, consideraremos M e N espaços métricos, dotados das métricas d_M e d_N, respectivamente.

Proposição 4.14 (Conjuntos Abertos e Continuidade)**.** *Uma função $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, para todo aberto $B \subseteq N$, tem-se que $A = f^{-1}(B) = \{x \in M\colon\ f(x) \in B\} \subseteq M$ é aberto.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se f contínua, então f contínua em todo $a \in M$. Suponhamos que $B \subseteq N$ seja aberto e consideremos $A = f^{-1}(B) = \{x \in M\colon f(x) \in B\} \subseteq M$.

- Se $A = \varnothing$, então A é aberto, pelo Teorema 4.13 - (A1).

- Suponhamos, então, $A \neq \varnothing$. Tomemos $a \in A$ arbitrariamente. Pela definição do conjunto A, temos $b := f(a) \in B$.

  Como B é aberto e $b = f(a) \in B$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a), \epsilon) \subset B$.

  Mas, f contínua em $a \in A$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

  $$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \subset B,$$

  donde

  $$\forall\, x \in B(a, \delta), f(x) \in B \quad \Rightarrow \quad B(a, \delta) \subset f^{-1}(B) = A \quad \Rightarrow \quad a \in \operatorname{int}(A).$$

  Como $a \in A$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que A é aberto.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $A = f^{-1}(B)$ seja aberto, para todo aberto B em N.

Sejam $a \in M$, $b = f(a) \in N$, $\epsilon > 0$. Sabemos que $B = B(f(a), \epsilon)$ é um conjunto aberto (Exemplo 4.10). Portanto, por hipótese, $A = f^{-1}(B)$ também é aberto.

Note que

$$b = f(a) \in B \quad \Rightarrow \quad a \in A = f^{-1}(B).$$

Como A é aberto e $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Daí,

$$f(B(a, \delta)) \subset B = B(f(a), \epsilon),$$

mostrando que f contínua em $a \in M$ (recorde a Definição 3.1). Sendo $a \in M$ arbitrário, podemos inferir que f é contínua. □

Observação 4.15. Se $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ é contínua então a imagem inversa de aberto é aberto pela Proposição 4.14. Mas, isso não é verdade para a imagem direta. Considere a função real:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

O conjunto $A = (-1, 1)$ é aberto (Exemplo 4.10), mas $f(A) = [0, 1)$ não é aberto (Observação 4.9).

4.2 Conjuntos fechados

Definição 4.16 (Ponto aderente)**.** Seja $X \subseteq M$. Um ponto $a \in M$ diz-se **aderente** a X se $d(a, X) = \inf\{d(a, x)\colon x \in X\} = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Equivalentemente, $a \in M$ é **aderente** a X se

- para todo $\epsilon > 0$, tem-se $B(a, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$.

Definição 4.17 (Fecho)**.** Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. O conjunto dos pontos aderentes de X é chamado de **fecho de** X e é denotado por $\overline{X}$. Sendo assim,

$$a \in \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad d(a, X) = 0.$$

Observação 4.18. Sejam X, Y subconjuntos de M. Podemos afirmar que:

(a) $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$ (se $a \in X$, então a é aderente a X, pois $d(a, X) = 0$);

(b) se $X \subset Y \subset M$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$ (se $a \in \overline{X}$, então para todo $\epsilon > 0$, tem-se $B(a,\epsilon) \cap X \neq \varnothing$ e, portanto, $B(a,\epsilon) \cap Y \neq \varnothing$, implicando que $a \in \overline{Y}$, já que $B(a,\epsilon) \cap Y \supset B(a,\epsilon) \cap X$).

Lema 4.19. *Para todo ponto $a \in M$ e todo subconjunto não-vazio X de M, tem-se*

$$d(a,X) = d(a,\overline{X}).$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$d(a,X) = \inf\{d(a,x) \colon x \in X\} \quad \text{e} \quad d(a,\overline{X}) = \inf\{d(a,\overline{x}) \colon \overline{x} \in \overline{X}\}.$$

Chamando $A = \{d(a,x) \colon x \in X\}$ e $B = \{d(a,\overline{x}) \colon \overline{x} \in \overline{X}\}$, temos que $A \subset B$, pois $X \subset \overline{X}$. Portanto, $\inf B \leqslant \inf A$, ou seja,

$$d(a,\overline{X}) \leqslant d(a,X). \tag{4.1}$$

Vamos mostrar que não vale $d(a,\overline{X}) < d(a,X)$ e, por (4.1), concluiremos que $d(a,\overline{X}) = d(a,X)$.

Pois bem, suponhamos que $d(a,\overline{X}) < d(a,X)$. Pela definição de ínfimo, existe $\overline{x} \in \overline{X}$ tal que $d(a,\overline{x}) < d(a,X)$. Chamemos $\epsilon = d(a,X) - d(a,\overline{x}) > 0$.

Como $\overline{x} \in \overline{X}$, temos que $d(\overline{x},X) = 0$. Logo, existe $x_0 \in X$ tal que $d(\overline{x},x_0) < \epsilon = d(a,X) - d(a,\overline{x})$. Sendo assim, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$d(a,X) \leqslant d(a,x_0) \leqslant d(a,\overline{x}) + d(\overline{x},x_0) < d(a,\overline{x}) + d(a,X) - d(a,\overline{x}) = d(a,X),$$

o que é absurdo. Portanto, devemos ter $d(a,\overline{X}) = d(a,X)$. □

Corolário 4.20. *Para todo subconjunto $X \subset M$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demonstração. É claro que $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$ (veja Observação 4.18 - (a)). Devemos mostrar que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$.

Com efeito, pelo Lema 4.19, temos

$$a \in \overline{\overline{X}} \quad \Rightarrow \quad d(a,\overline{X}) = 0 \quad \Rightarrow \quad d(a,X) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \in \overline{X},$$

de onde segue que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$ e completa a prova. □

Definição 4.21 (Conjunto Fechado)**.** Um conjunto $F \subseteq M$ é **fechado** em M se seu complementar $M - F$ é aberto em M.

A proposição seguinte relaciona o conceito de fechado com o de fecho.

Proposição 4.22. *Dado $F \subseteq M$, tem-se $\overline{F} = F$ se, e somente se, $M - F$ é aberto. Isso significa que F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\overline{F} = F$ e tomemos $a \in M - F$ arbitrariamente.

Note que

$$\begin{aligned} a \in M - F \quad &\Rightarrow \quad a \notin F \quad \Rightarrow \quad a \notin \overline{F} \\ &\Rightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \mid B(a,\epsilon) \cap F = \varnothing \\ &\Rightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \mid B(a,\epsilon) \subset M - F \quad \Rightarrow \quad a \in \operatorname{int}(M - F), \end{aligned}$$

de onde podemos inferir que $M - F \subset \text{int}(M - F)$ e, consequentemente, $M - F$ é aberto (Observação 4.12).

($\Leftarrow$) Suponhamos que $M - F$ seja aberto e tomemos $a \in \overline{F}$ arbitrariamente.

Note que

$$\begin{aligned} a \in \overline{F} \quad &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \text{ tem-se } B(a,\epsilon) \cap F \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \text{ tem-se } B(a,\epsilon) \not\subset M - F \quad \Rightarrow \quad a \notin \text{int}(M - F) = M - F \\ &\Rightarrow \quad a \in F. \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que $\overline{F} \subset F$ e, consequentemente, $\overline{F} = F$. □

Corolário 4.23. *Para todo $X \subseteq M$, $\overline{X}$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Segue do Corolário 4.20 e da Proposição 4.22. No entanto, adicionamos uma demonstração alternativa abaixo.

Devemos mostrar que o complementar de $\overline{X}$, $M - \overline{X}$, é aberto em M. É o que faremos a seguir.

Note que

$$\begin{aligned} a \in M - \overline{X} \quad &\Leftrightarrow \quad a \notin \overline{X} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \mid B(a,\epsilon) \cap X = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \mid B(a,\epsilon) \subset M - X \quad \Leftrightarrow \quad a \in \text{int}(M - X). \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que $M - \overline{X}$ é aberto, pois $\text{int}(M - X)$ é aberto (veja a Proposição 4.11 - (c) e a Observação 4.12) e $M - \overline{X} = \text{int}(M - X)$. □

Proposição 4.24. *$X \subseteq M$ é fechado se, e somente se, $\partial X \subset X$.*

Pela Proposição 4.6, temos

$$M = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(M - X), \tag{4.2}$$

sendo a união acima disjunta.

No Corolário 4.23 vimos que

$$M - \overline{X} = \text{int}(M - X). \tag{4.3}$$

Sendo assim, de (4.2) e (4.3) segue que

$$\overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X, \tag{4.4}$$

sendo a união disjunta, uma vez que $M = \overline{X} \cup (M - \overline{X})$.

($\Rightarrow$) Se X é fechado, então $X = \overline{X}$ e, por (4.4), temos

$$\partial X \subset X.$$

($\Leftarrow$) Suponha que $\partial X \subset X$ e, por absurdo, admita que X não é fechado. Então, existe $a \in \overline{X} - X$. Como $a \in \overline{X}$, para todo $\epsilon > 0$ tem-se

$$B(a,\epsilon) \cap X \neq \varnothing.$$

Ademais, $B(a,\epsilon) \cap (M - X) \neq \varnothing$, pois $a \in B(a,\epsilon) \cap (M - X)$. Logo, $a \in \partial X$ e, como $\partial X \subset X$, $a \in X$, o que está em contradição com a suposição feita. Dessa forma, podemos inferir que X é fechado se $\partial X \subset X$, completando a prova.

Exemplo 4.25. Num espaço métrico M, toda bola fechada $B[a,r]$ é um subconjunto fechado.

Para provar essa afirmação, vamos mostrar que o complementar de $B[a,r]$ em M é um conjunto aberto e assim obter o resultado.

Com efeito, tomemos arbitrariamente $x_0 \in M - B[a,r]$. Então,

$$d(x_0,a) > r \quad \Rightarrow \quad d(x_0,a) - r > 0.$$

Seja $\delta = d(x_0,a) - r > 0$. Afirmamos que $B(x_0,\delta) \subset M - B[a,r]$. De fato, dado $y \in B(x_0,\delta)$, temos

$$d(y,x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad -d(y,x_0) > -\delta.$$

Daí,

$$d(y,a) \overset{(M3)}{=} d(a,y) \geqslant d(a,x_0) - d(x_0,y) > d(a,x_0) - \delta = d(a,x_0) - d(a,x_0) + r = r,$$

donde $y \in M - B[a,r]$. Portanto, como $B(x_0,\delta) \subset M - B[a,r]$, concluímos que x_0 é ponto interior de $M - B[a,r]$ e, consequentemente, que $M - B[a,r]$ é aberto.

Exemplo 4.26. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset M$ é fechado.

Para provar que F é fechado, vamos mostrar que $F = \overline{F}$. É claro que $F \subset \overline{F}$ (Observação 4.18 - (a)). Resta-nos verificar que $\overline{F} \subset F$.

Com efeito, suponha que $a \in \overline{F} - F$. Então,

$$\begin{aligned} d(a,F) &= \inf\{d(a,a_1), d(a,a_2), d(a,a_3), \ldots, d(a,a_n)\} \\ &= \min\{d(a,a_1), d(a,a_2), d(a,a_3), \ldots, d(a,a_n)\} > 0, \end{aligned}$$

pois $a \neq a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, já que $a \notin F$. Portanto, $a \notin \overline{F}$, o que é absurdo. Sendo assim, se $a \in \overline{F}$ devemos ter $a \in F$. Logo, $F = \overline{F}$.

O conjunto de todos os fechados de um espaço métrico (M,d), que denotaremos por Closed (M,d), contém sempre os conjuntos $\varnothing$ e M, bem como é fechado sob algumas operações de conjuntos: união finita e interseção qualquer. Para provar essas afirmações, usaremos a definição de conjunto fechado (Definição 4.21), as Leis de De Morgan (recordadas abaixo) e o Teorema 4.13.

Lema 4.27 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam M um conjunto e $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de M. Tem-se:*

(DM1) $M - (\bigcup_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I} (M - F_i)$;

(DM2) $M - (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I} (M - F_i)$.

Demonstração. ▷ *Prova de* (DM1). Temos que

$$\begin{aligned} x \in M - \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{i\in I} F_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ x \notin F_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ x \in M - F_i \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in I} (M - F_i). \end{aligned}$$

▷ *Prova de* (DM2). Temos que

$$\begin{aligned} x \in M - \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} F_i \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \mid x \notin F_{i_0} \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \mid x \in M - F_{i_0} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} M - F_i. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.28. *Seja Closed* (M,d) *o conjunto de todos os subconjuntos fechados de* M*, isto é:*

$$\mathit{Closed}(M,d) = \{F \subseteq M : F \text{ é fechado}\}.$$

Closed (M,d) *tem as seguintes propriedades:*

(F1) $\varnothing, M \in \text{Closed}(M,d)$.

(F2) *Se* $\{F_i\}_{i\in I}$ *é uma família qualquer de fechados, ou seja, se* $\{F_i\}_{i\in I} \subset \text{Closed}(M,d)$ *então* $\bigcap_{i\in I} F_i \in \text{Closed}(M,d)$*, ou seja,* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *é um subconjunto fechado de* M.

(F3) *Se* $F_1, \ldots, F_n \in \text{Closed}(M,d)$*, então* $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \text{Closed}(M,d)$*, ou seja,* $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ *é um subconjunto fechado de* M.

Demonstração. ▷ *Prova de* (F1). Basta observar que os complementares de $\varnothing$ e M em M (M e $\varnothing$, respectivamente) são abertos em M (veja o Teorema 4.13 - (A1)).

▷ *Prova de* (F2). Se $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos fechados de M, então $\{M - F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de M. Pelo item (A2) do Teorema 4.13, segue que

$$\bigcup_{i\in I} M - F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Mas, pela Lei de De Morgan (DM2), temos que

$$M - \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} M - F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Logo, $\bigcap_{i\in I} F_i$ é um subconjunto fechado de M.

▷ *Prova de* (F3). Temos que $M - F_1, \ldots, M - F_n$ são subconjuntos abertos de M. Pelo item (A3) do Teorema 4.13, sabemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} M - F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Pela Lei de De Morgan (DM1), temos que

$$M - \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} M - F_i$$

é um subconjunto aberto de M e, portanto, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é um subconjunto fechado de M. □

Observação 4.29. "Fechado" não é o contrário de "aberto". Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir que ele é aberto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais não é fechado nem aberto em $\mathbb{R}$. Há mesmo casos de conjuntos que são ao mesmo tempo fechados e abertos: o vazio e o espaço inteiro são exemplos disso.

Para a próxima proposição, consideraremos M e N espaços métricos, dotados das métricas d_M e d_N, respectivamente.

Proposição 4.30 (Conjuntos Fechados e Continuidade)**.** *Uma função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F') = \{x \in M\colon f(x) \in F'\}$ de todo subconjunto fechado $F' \subset N$ em N é fechado em M.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se F' é fechado em N, então $N - F'$ é aberto em N. Como f é contínua, temos, pela Proposição 4.14, que

$$f^{-1}(N - F') = \{x \in M\colon\ f(x) \in N - F'\} \text{ é aberto em M.}$$

Mas, note que

$$f^{-1}(N - F') = \{x \in M\colon\ f(x) \in N - F'\} = \{x \in M\colon f(x) \notin F'\} = M - f^{-1}(F').$$

Portanto, $M - f^{-1}(F')$ é aberto em M e, consequentemente, $f^{-1}(F')$ é fechado em M.

($\Leftarrow$) Dado $A \subset N$ aberto, temos que $N - A$ é fechado. Por hipótese, $f^{-1}(N - A)$ é fechado em M. Mas,

$$f^{-1}(N - A) = \{x \in M\colon\ f(x) \in N - A\} = \{x \in M\colon f(x) \notin A\} = M - f^{-1}(A).$$

Assim, $M - f^{-1}(A)$ é fechado em M e, portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto em M. Logo, pela Proposição 4.14, f é contínua. □

Definição 4.31 (Ponto de Acumulação)**.** Sejam $X \subseteq M$ e $x_0 \in M$. Dizemos que x_0 é um **ponto de acumulação** de X se para todo $\delta > 0$, o conjunto $X \cap B(x_0, \delta)$ sempre contiver um ponto distinto de x_0, ou seja, se valer

$$(\forall \delta > 0)\,((B(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap X \neq \varnothing).$$

Exemplo 4.32. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual, $d(x, y) = |x - y|$. O número 0 é ponto de acumulação do conjunto

$$X = \left\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}.$$

De fato, dado qualquer $\epsilon > 0$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$. Equivalentemente,

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n_0}}_{\in X} < 0 + \epsilon$$

e, portanto, $1/n_0 \in X \cap (0 - \epsilon, 0 + \epsilon) = X \cap (B(0, \epsilon)\backslash\{0\})$.

Definição 4.33 (Conjunto derivado)**.** Seja $X \subseteq M$. O **derivado** de X, que denotamos por X', é o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.

Observação 4.34. Note que $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.

Finalizamos este capítulo estabelecendo uma relação entre $\overline{X}$, X e X'.

Proposição 4.35. *Dado $X \subset M$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$ (reunião não necessariamente disjunta).*

Demonstração. É claro que $X \cup X' \subset \overline{X}$. Devemos mostrar que $\overline{X} \subset X \cup X'$.

Com efeito, se $a \in \overline{X} = X \cup \partial X$, então $a \in X$ ou $a \in \partial X$. No segundo caso, toda bola centrada em a tem um ponto de X necessariamente diferente de a, implicando que $a \in X'$. □

5 Sequências

Neste capítulo, sob a luz das referências [9, 10, 12] e [13], introduziremos os conceitos de sequência, subsequência, sequência de Cauchy, além de conceitos relacionados a sequências, como limite e convergência. Também apresentaremos propriedades importantes de sequências, especialmente as de Cauchy, a serem referenciadas no capítulo subsequente, sobre espaços métricos completos.

Cabe informar que, ao longo deste capítulo, M denotará um espaço métrico dotado de uma métrica d. Além disso, quando considerarmos $M = \mathbb{R}$, consideraremos M dotado da métrica usual (Exemplo 2.3).

5.1 Definição e resultados básicos

Inicialmente, apresentaremos o conceito de sequência num espaço métrico, pois no futuro esse conceito será utilizado para definir um espaço métrico completo, componente fundamental para apresentar o teorema de ponto fixo que estudaremos.

Definição 5.1 (Sequência)**.** Uma **sequência** em M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$, que associa a cada número natural, um único ponto de M. O valor que a sequência x assume para o número $n \in \mathbb{N}$ será denotado por x_n em vez de $x(n)$, e chamado de n-ésimo termo da sequência.

Para denotar a sequência x, podemos usar as seguintes notações:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ ou } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (x_n).$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\} \text{ ou } \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ou } x(\mathbb{N}),$$

para indicar o conjunto dos valores ou o conjunto dos termos da sequência. Este conjunto não deve ser confundido com a sequência. A seguir veremos um exemplo que ilustra a diferença entre eles.

Exemplo 5.2. Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a sequência definida por $x_n = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é dada por $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, enquanto seu conjunto de valores é $\{-1, 1\}$.

Note que entre os termos x_n da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podem ocorrer repetições, isto é, pode-se ter $x_m = x_n$ para $m \neq n$. Quando a aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ for injetiva, ou seja, quando $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de termos distintos.

Definição 5.3 (Sequência limitada)**.** Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é dita ser **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leqslant c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.4. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definida por $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é limitada, pois

$$d(x_m, x_n) = 0 \quad \text{ou} \quad d(x_m, x_n) = 2$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.5 (Subsequência)**.** Seja $x : \mathbb{N} \to M$ uma sequência em M. Seja também $\kappa : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente (ou seja, $k(m) < k(n)$ se $m < n$). Então, a função $x \circ \kappa : \mathbb{N} \to M$ é dita ser uma **subsequência** de x. Equivalentemente, uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$.

Para denotar uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, usamos as notações:

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots) \text{ ou } (x_n)_{n\in\mathbb{N}'} \text{ ou } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo 5.6. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dos números naturais, $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência dos números naturais pares $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, com $\mathbb{N}' = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 5.7. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a progressão aritmética de termo inicial a e razão r. A progressão aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k - 2)r = a + (k - 1)(2r) = y_k.$$

Definição 5.8 (Limite de sequência)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Dizemos que $a \in M$ é o **limite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \epsilon,$$

ou equivalentemente

$$d(x_n, a) < \epsilon, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ϵ.

Se $a \in M$ for o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, usaremos as seguintes notações para denotar este fato:

$$a = \lim x_n \text{ ou } a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ou } x_n \to a.$$

Neste caso, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ou **tende** para a e que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **convergente**. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não for convergente, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **divergente**.

Simbolicamente, escrevemos a Definição 5.8 da seguinte forma:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Exemplo 5.9. Toda sequência constante em M é convergente.

Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $x_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $c \in M$. Para todo $\epsilon > 0$, temos

$$d(x_n, c) = d(c, c) = 0 < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Exemplo 5.10. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, dada por $x_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge para 0, ou seja, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon},$$

uma vez que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente. Daí,

$$\frac{1}{n_0} < \epsilon. \tag{5.1}$$

Por outro lado, a sequência $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Dessa forma, temos

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}. \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2), obtemos

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon,$$

implicando que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Proposição 5.11. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M converge para $a \in M$ se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $x_n \to a$. Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, $y_k = x_{n_k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ para alguma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente.

Vamos mostrar que $y_k \to a$. Para tanto, consideremos $\epsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \epsilon. \tag{5.3}$$

N

Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ é estritamente crescente e $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geqslant K \quad \Rightarrow \quad n_k \geqslant n_0. \tag{5.4}$$

De (5.3) e (5.4) segue que

$$k \geqslant K \quad \Rightarrow \quad d(y_k, a) < \epsilon,$$

provando que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para a.

($\Leftarrow$) A recíproca é imediata, pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de si mesma. □

Proposição 5.12 (Unicidade do limite)**.** *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em M, seu limite é único.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $b = \lim_{n\to\infty} x_n$, com $a, b \in M$, $a \neq b$. Pela definição de limite, dado $\epsilon = d(a,b) > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &< \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \geqslant n_1, \\ d(x_n, b) &< \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \geqslant n_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Claramente, $n_0 \geqslant n_1$ e $n_0 \geqslant n_2$. Daí, por (5.5), temos

$$d(x_{n_0}, a) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(x_{n_0}, b) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$0 < \epsilon = d(a,b) \overset{(M4)}{\leqslant} d(a, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que é absurdo. Logo, devemos ter $a = b$. □

Corolário 5.13. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui duas subsequências que convergem para valores distintos, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente.*

Demonstração. Se existisse $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ então toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiria para a. Portanto, nenhuma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuiria limite diferente de a. □

Proposição 5.14. *Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos a, b então existe em M pelo menos uma sequência divergente.*

Demonstração. Vamos definir $x_n = a$ para n ímpar e $x_n = b$ para n par. Nenhum ponto $c \in M$ pode ser limite da sequência $(a, b, a, b, a, b, \dots)$ assim obtida.

Com efeito, se tomarmos

$$\epsilon = \frac{d(a,b)}{2},$$

nenhuma bola aberta de raio ϵ poderá conter ambos os pontos a e b.

Assim, não existe n_0 tal que $x_n \in B(c, \epsilon)$ para todo $n \geqslant n_0$, qualquer que seja $c \in M$. □

Proposição 5.15. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Para $\epsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < 1 \quad \Rightarrow \quad x_n \in B(a, 1).$$

Note que

$$x_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a,1), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, o conjunto dos termos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contido na união de dois conjuntos limitados (veja Exemplos 2.40 e 2.41) e, portanto, contido num conjunto limitado (veja Proposição 2.42). Isso implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Observação 5.16. Toda sequência convergente em M é limitada, mas a recíproca não é válida. A sequência de números reais $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, mas não é convergente, pois tem duas subsequências que convergem para valores distintos, a saber, $((-1)^{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (que converge para -1) e $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (que converge para 1).

5.2 Continuidade e sequências

Nesta subseção, exibiremos o Critério Sequencial para Continuidade (conceito visto no Capítulo 3), que será importante para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para prová-lo, usaremos o seguinte lema.

Lema 5.17. *Seja $a \in M$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < 1/n$, então $x_n \to a$.*

Demonstração. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$. Daí, $1/n_0 < \epsilon$ e

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \epsilon,$$

de onde segue que $x_n \to a$. □

Na próxima proposição, consideraremos M e N espaços métricos, cujas métricas denotaremos por d_M e d_N.

Proposição 5.18 (Critério Sequencial para Continuidade)**.** *Uma função $f\colon M \to N$ é contínua em $a \in M$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tal que $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to f(a)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vamos, inicialmente, supor que f é contínua em a e considerar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em M tal que $x_n \to a$.

(i) Pela continuidade da f em a, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_M(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

(ii) Como $x_n \to a$, para tal $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_M(x_n, a) < \delta$, para todo $n \geqslant n_0$.

(iii) Por (i) e (ii), concluímos que $d_N(f(x_n), f(a)) < \epsilon$, para todo $n \geqslant n_0$, ou seja, $f(x_n) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Vamos fazer a prova desta implicação por redução ao absurdo.

(i) Suponha que f não seja contínua em $a \in M$.

(ii) Por (i), existe $\epsilon > 0$, tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in M$ de forma que

$$d_M(x_\delta, a) < \delta \quad \text{e} \quad d_N(f(x_\delta), f(a)) \geqslant \epsilon.$$

(iii) Em particular, para $\delta = 1/n$ em (ii), existe $x_n \in M$ com

$$d_M(x_n, a) < 1/n \quad \text{e} \quad d_N(f(x_n), f(a)) \geqslant \epsilon \ (*).$$

(iv) Por (iii) e pelo Lema 5.17, temos que $x_n \to a$ mas $f(x_n) \not\to f(a)$ por $(*)$, contradizendo a hipótese. Logo, f deve ser contínua em a.

□

5.3 Sequências de Cauchy

Há sequências que possuem a característica de que seus termos vão se aproximando uns dos outros tanto quanto se queira à medida que cresce o índice n, são as chamadas *sequências de Cauchy*, protagonistas da definição de espaço métrico completo que veremos no Capítulo 6. Abaixo formalizaremos esse conceito.

Definição 5.19 (Sequência de Cauchy)**.** Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \epsilon,$$

ou equivalentemente

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n \geqslant n_0.$$

Exemplo 5.20. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, dada por $x_n = \dfrac{1}{n}$, é de Cauchy.

Com efeito, vimos que $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ (Exemplo 5.10). Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí,

$$m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposição 5.21. *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy em M é também de Cauchy.*

Demonstração. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \epsilon. \tag{5.6}$$

Sendo $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos que os índices n_k são números naturais tais que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$.

Dessa forma,

$$n_k, n_j \geqslant n_{k_0} \quad \Rightarrow \quad n_k, n_j > n_0. \tag{5.7}$$

Logo, por (5.6) e (5.7), concluímos que

$$n_k, n_j \geqslant n_{k_0} \quad \Rightarrow \quad d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \epsilon,$$

de onde segue que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

□

Quando uma sequência num espaço métrico M converge para um ponto $a \in M$, seus termos se aproximam de a tanto quanto se queira para valores grandes de n. Isso nos faz deduzir que, consequentemente, eles devem se aproximar um dos outros tanto quanto se deseja também para valores grandes de n. Provaremos este fato a seguir.

Teorema 5.22. *Toda sequência convergente em M é de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente e seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \geqslant n_0.$$

Portanto,

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall\, m, n \geqslant n_0,$$

de onde segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. □

Observação 5.23. É importante observar que nem toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Por exemplo, existem sequências de números reais racionais que convergem para um número real irracional, como a sequência de racionais definida por $x_n = (1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, que converge para o número irracional e - veja [10]. Sendo essa sequência convergente em $\mathbb{R}$, ela é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, em $\mathbb{Q}$. No entanto, ela não converge em $\mathbb{Q}$.

Por meio da próxima proposição, constataremos que toda sequência de Cauchy num espaço métrico é limitada.

Proposição 5.24. *Toda sequência de Cauchy em M é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Então, para $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < 1, \ \forall\, m, n \geqslant n_0.$$

Assim, o conjunto

$$A = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2} \dots\}$$

é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1, pois $d(x_m, x_n) < 1$ para quaisquer $m, n \geqslant n_0$, implicando que

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x_m, x_n) \colon m, n \geqslant n_0\} \leqslant 1.$$

O conjunto

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\}$$

também é limitado, posto que é finito (Exemplo 2.40).

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \cup B$ e $A \cup B$ é um conjunto limitado (Proposição 2.42), concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Observação 5.25. A recíproca do Teorema 5.24 não é verdadeira. De fato, a sequência de números reais

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, \dots)$$

é limitada, mas não é de Cauchy, já que $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 5.26. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M e possui uma subsequência convergente (para a), então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge (para a).*

Demonstração. Por hipótese, temos que

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M;
- Existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to a \in M$.

Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, tome $\epsilon > 0$.

(i) Como $x_{n_k} \to a$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \epsilon/2$, sempre que $n_k \geqslant p$.

(ii) Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon/2$, sempre que $m, n \geqslant q$.

(iii) Tome $n_0 = \max\{p, q\}$.

(iv) Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geqslant n_0$. Por (i) e (ii), temos que

$$d(x_n, a) \overset{(M4)}{\leqslant} d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall\, n \geqslant n_0. \qquad \square$$

5.3.1 Continuidade uniforme e sequências de Cauchy

Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Pela Proposição 5.18, podemos afirmar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em M tal que $x_n \to a \in M$ e $f\colon M \to N$ é contínua em a, então $f(x_n) \to f(a)$ em N. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de Cauchy em M e $f\colon M \to N$ for contínua, poderemos afirmar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em N? A resposta é não. Vejamos os próximos exemplos.

Exemplo 5.27. Seja $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $f(x) = 1/x$ para $x \in (0,1]$.

Embora a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ seja de Cauchy (Exemplo 5.20), a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f(x_n) = n$ para $n \in \mathbb{N}$ não é de Cauchy, pois não é limitada (Proposição 5.24).

Exemplo 5.28. Seja $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $g(x) = \cos(1/x)$ para $x \in (0,1]$.

A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = 1/n\pi$ para $n \in \mathbb{N}$ é de Cauchy, uma vez que é convergente em $\mathbb{R}$ (Proposição 5.22) - é fácil ver que $x_n = 1/n\pi \to 0$. No entanto, a sequência $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $g(x_n) = \cos n\pi = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ não é de Cauchy, pois $d(x_n, x_{n+1}) = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de Cauchy em M e $f\colon M \to N$ for uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência de Cauchy em N. Antes de provarmos essa propriedade, veremos a definição de continuidade uniforme ainda não introduzida e um exemplo para ilustrar esse conceito.

Definição 5.29 (Convergência Uniforme)**.** Dizemos que $f\colon M \to N$ é **uniformemente contínua** se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in M,\ d_M(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Exemplo 5.30. Toda função $f : M \to N$ lipschitziana é uniformemente contínua.

De fato, se f é lipschitziana (veja a Definição 3.3), então existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_M(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Sendo assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon/c > 0$ tal que

$$x, y \in X \quad \text{e} \quad d_M(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d_M(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon,$$

de onde segue que f é uniformemente contínua.

Observação 5.31. Claramente, toda função uniformemente contínua é contínua, mas nem toda função contínua é uniformemente contínua. A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ é contínua, mas não é uniformemente contínua. De fato, note que

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Se $\epsilon < 2$, então para todo $\delta > 0$ pode-se obter x_δ e y_δ em $\mathbb{R}$ tais que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ mas $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geqslant \epsilon$. Com efeito, se $x_\delta = \delta/4$ e $y_\delta = -\delta/4$ então $|x_\delta - y_\delta| = \delta/2 < \delta$ e $f(x_\delta) = 1$ e $f(y_\delta) = -1$, donde $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = 2 > \epsilon$. Isso mostra que f não é uniformemente contínua.

No entanto, f é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$. Com efeito, fixando $x_0 < 0$ e tomando $\epsilon > 0$ arbitrariamente, temos que existe $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-\infty, 0)$, posto que $(-\infty, 0)$ é um conjunto aberto. Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-\infty, 0)$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |-1 - (-1)| = 0 < \epsilon.$$

Dessa forma, vemos que f é contínua em x_0. De forma análoga, se fixarmos $x_1 > 0$ e tomarmos $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset (0, +\infty)$, posto que $(0, +\infty)$ é um conjunto aberto. Se $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset (0, +\infty)$ então

$$|f(x) - f(x_1)| = |1 - 1| = 0 < \epsilon,$$

donde f é contínua em x_1.

Proposição 5.32. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em M e $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em N.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M, para tal $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall\, m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \delta.$$

Dessa forma,

$$\forall\, m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon,$$

de onde segue que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em N.

□

5.4 Particularidades de sequências de números reais

Nesta seção, vamos considerar somente sequências no espaço métrico $M = \mathbb{R}$, no qual consideraremos a métrica usual (Exemplo 2.3). Os resultados desta seção serão importantes para concluir que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

O primeiro resultado que abordaremos fornecer-nos-á condições suficientes para a convergência de uma sequência de números reais. Para compreender sua demonstração, precisaremos dos conceitos de supremo e ínfimo[1] de um conjunto limitado de números reais e da definição de sequência monótona, exposta a seguir.

Definição 5.33. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ será dita **crescente** quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será dita **não-decrescente**. Analogamente, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será dita **decrescente**. Ela será dita **não-crescente** quando $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são denominadas **sequências monótonas**.

Teorema 5.34. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Para fixar ideias, consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-crescente limitada e $a = \inf\{x_n\colon\ n = 1, 2, 3, \dots\}$. Vamos mostrar que $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. De fato, dado qualquer $\epsilon > 0$, como $a < a + \epsilon$, o número $a + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{x_n\colon\ n = 1, 2, 3, \dots\}$. Portanto, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} < a+\epsilon$. Como a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-crescente, se $n \geqslant n_0$ então $x_n \leqslant x_{n_0}$ e, portanto, $x_n \leqslant x_{n_0} < a+\epsilon$. Como $a \leqslant x_n$, vemos que

$$n \geqslant n_0 \quad\Longrightarrow\quad a - \epsilon \underbrace{<}_{\epsilon>0} a \leqslant x_n < a + \epsilon.$$

Por conseguinte, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, como queríamos demonstrar.

A demonstração nos casos em que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ou decrescente, ou crescente ou não-crescente é feita de modo análogo, por isso nos permitiremos omiti-la. □

Agora, nos concentraremos em provar o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual garante que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Mas antes de abordarmos o referido resultado, introduziremos um novo conceito. Dizemos que um termo x_{n_0} é **destacado** da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando

$$x_{n_0} \geqslant x_p \quad \text{para todo } p > n_0.$$

Por exemplo, $x_1 = 1$ é um termo destacado da sequência $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 5.35 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Para provar este resultado, vamos mostrar que toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais possui uma subsequência monótona. Pois bem, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada arbitrária.

[1] Dado um subconjunto X não vazio de $\mathbb{R}$, o ínfimo de X ($\inf X$) é a maior cota inferior de X e o supremo de X ($\sup X$) é menor cota superior de X. Para mais detalhes e propriedades, veja [10].

Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito,

$$D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots\},$$

então a subsequência $(x_n)_{n\in D}$ será monótona não-crescente. De fato, como x_{n_1} é destacado e $n_2 > n_1$, segue que

$$x_{n_1} \geqslant x_{n_2}.$$

De forma análoga, como x_{n_2} é destacado e $n_3 > n_2$, temos

$$x_{n_2} \geqslant x_{n_3}.$$

Sucessivamente, concluímos que

$$x_{n_{k-1}} \geqslant x_{n_k},$$

já que $x_{n_{k-1}}$ é destacado e $n_k > n_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Em contrapartida, supondo D finito, tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado. Logo, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Como $n_2 > n_1$, temos que $n_2 \notin D$ e, portanto, x_{n_2} não é destacado. Sendo assim, existe $n_3 > n_2$ tal que

$$x_{n_2} < x_{n_3}.$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_k} < \ldots$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nos dois casos (em que D é finito e D é infinito), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência monótona limitada. Tal subsequência é convergente pelo Teorema 5.34. Isso completa a prova. □

Para concluir esta seção, vamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente, ou seja, mostraremos que, em $\mathbb{R}$, vale a recíproca do Teorema 5.22.

Teorema 5.36. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy arbitrária em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Note que

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots.$$

Ademais, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada (Proposição 5.24) e, portanto, cada X_n é limitado, possuindo , portanto, supremo e ínfimo.

Seja $a_n = \inf X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b = \sup X_1.$$

Assim, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e monótona em $\mathbb{R}$ e, pelo Teorema 5.34, é convergente. Seja $a = \lim a_n$.

Afirmação: $a = \lim x_n$.

Sendo (x_n) de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geqslant n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.8}$$

Sendo $a = \lim a_n$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_2 \quad \Rightarrow \quad a - \frac{\epsilon}{3} < a_n < a + \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.9}$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, de (5.8) e (5.9) segue que

$$m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.10}$$

e

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad a - \frac{\epsilon}{3} < a_n < a + \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.11}$$

Como $a_n = \inf X_n$, fixado $n \geqslant n_0$, existe $\tilde{n} \geqslant n \geqslant n_0$ tal que

$$a_n \leqslant x_{\tilde{n}} < a_n + \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.12}$$

Por (5.10), (5.11) e (5.12), concluímos que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| \leqslant |x_n - x_{\tilde{n}}| + |x_{\tilde{n}} - a_n| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

ou seja, $x_n \to a$, o que completa a demonstração. □

6 Espaços métricos completos e espaços de Banach

Neste capítulo vamos exibir o conceito e algumas propriedades de espaços métricos completos, bem como de espaços de Banach, de forma a completar os pré-requisitos necessários para apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e suas aplicações. As referências que fundamentam a teoria apresentada aqui são [2, 9, 10, 12, 13] e [16].

6.1 Espaços métricos completos

Para introduzir o conceito de espaço métrico completo, vamos considerar novamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais, dada por $x_n = (1+1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, convergente para o número irracional e, mencionada na Observação 5.23. Sendo convergente, tal sequência é de Cauchy (conforme vimos no Teorema 5.22). Como a definição de sequência de Cauchy não faz menção ao limite, mesmo se só conhecêssemos números racionais, ainda estaríamos de acordo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porém, neste caso, não seríamos capazes de mostrar a existência do limite em $\mathbb{Q}$. Ou seja, se considerássemos apenas números racionais, não seria possível mostrar que toda sequência de Cauchy é convergente.

Já que sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$ são convergentes (Teorema 5.36) mas podem não ser em $\mathbb{Q}$, isto deve estar relacionado à completeza - recordando que $\mathbb{Q}$ não é um corpo completo[1]. Espaços métricos em que toda sequência de Cauchy é convergente são denominados completos, conforme formalizaremos a seguir.

Definição 6.1 (Espaço métrico completo)**.** Um espaço métrico (M,d) é dito ser **completo** se toda sequência de Cauchy em M convergir em M.

Observação 6.2. Pela discussão acima e pela Definição 6.1, reiteramos que $\mathbb{Q}$ não é um espaço métrico completo.

Levando em conta a Definição 6.1, observamos que, em um espaço métrico completo, para garantirmos que uma sequência converge, basta analisarmos se a mesma é de Cauchy, o que pode ser feito apenas estudando a distância entre elementos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

O Teorema 5.36 permite-nos exibir o seguinte exemplo.

Exemplo 6.3. A reta real, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, é um espaço métrico completo.

O próximo lema será útil para a proposição subsequente. Para os dois resultados, é importante que o leitor recorde as Definições 4.16 e 4.17.

[1] Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito ser completo se todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{K}$, limitado superiormente, possui supremo em K - veja essa definição e a justificativa para afirmação feita em [10].

Lema 6.4. *Sejam $X \subset M$ e $a \in M$. Então, $a \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X tal que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $a \in \overline{X}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X \cap B(a, 1/n)$ (considerando $\epsilon = 1/n$ na Definição 4.16). Isso significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_n \in X$ tal que

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n}.$$

Segue do Lema 5.17 que $x_n \to a$.

($\Leftarrow$) Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência em X tal que $x_n \to a$. Pela definição de limite de sequência, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad x_n \in X \cap B(a, \epsilon).$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, tem-se $X \cap B(a, \epsilon) \neq \varnothing$, de onde segue que $a \in \overline{X}$. □

Proposição 6.5. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Seja (M, d) um espaço métrico completo.

Suponhamos que $F \subset M$ seja fechado. Dada uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$ por M ser completo. Como F é fechado em M, segue do Lema 6.4 que $a \in F$. Logo, F é completo.

Por outro lado, suponha que $X \subset M$ seja um subconjunto completo. Vamos mostrar que X é fechado. Dado $a \in \overline{X}$, pelo Lema 6.4, $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, para alguma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Como X é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em X. Logo, existe $b \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Pela unicidade do limite, concluímos que $b = a$ e, portanto, $a \in X$. Isso mostra que X é fechado. □

Proposição 6.6. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e considere $(M \times N, d)$, onde d é qualquer uma das métricas equivalentes que se pode munir o produto $M \times N$ (veja o Exemplo 2.24). O espaço $(M \times N, d)$ é completo se, e somente se, (M, d_M) e (N, d_N) forem completos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_M), então para cada $y_0 \in N$, $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d\left((x_m, y_0), (x_n, y_0)\right) = d_M(x_m, x_n) + d_N(y_0, y_0) = d_M(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Portanto, como $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $(M \times N, d)$ é, por hipótese, completo, segue que $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$. Afirmamos que $\bar{y} = y_0$. De fato, como $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, \bar{y})$, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant n_1 \quad \Rightarrow \quad d\left((x_n, y_0), (\bar{x}, \bar{y})\right) = d_M(x_n, \bar{x}) + d_N(y_0, \bar{y}) < \epsilon$$

e, em particular,

$$d_N(y_0, \bar{y}) < \epsilon.$$

Como

$$(\forall \epsilon > 0)\left(d_N(y_0, \bar{y}) < \epsilon\right)$$

segue que $d_N(y_0, \bar{y}) = 0$, e como d_N é métrica, segue que $y_0 = \bar{y}$ (por (M1)). Assim, $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, y_0) \in M \times N$. Segue daí que, dado $\epsilon > 0$, existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n^* \quad \Rightarrow \quad d((x_n, y_0), (\bar{x}, y_0)) = d_M(x_n, \bar{x}) < \epsilon.$$

Assim,

$$x_n \to \bar{x},$$

ou seja, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $\bar{x} \in M$, provando que M é completo.

A prova de que qualquer sequência de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em N converge se faz de modo análogo e será omitida.

($\Leftarrow$) Se $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e em N, respectivamente. Como (M, d_M) e (N, d_N) são ambos completos, existem $\bar{x} \in M$ e $\bar{y} \in N$ tais que $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to \bar{x}$, para o número $\epsilon/2 > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_1 \quad \Rightarrow \quad d_M(x_n, \bar{x}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $y_n \to \bar{y}$, para o número $\epsilon/2 > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_2 \quad \Rightarrow \quad d_N(y_n, \bar{y}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, teremos:

$$n \geqslant n_0 \qquad \Rightarrow \qquad d((x_n, y_n), (\bar{x}, \bar{y})) = d_M(x_n, \bar{x}) + d_N(y_n, \bar{y}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Segue, assim, que $(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$.

Como $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy qualquer em $(M \times N, d)$, segue que toda sequência de Cauchy do produto carteasiano converge. Logo, $(M \times N, d)$ é completo. □

Observação 6.7. O resultado acima pode ser facilmente generalizado para qualquer produto finito de espaços métricos (veja [9]). Em particular, temos o seguinte exemplo.

Corolário 6.8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathbb{R}^n, \tilde{d}\right)$, onde $\tilde{d} \in \{d, d', d''\}$ (veja Exemplo 2.25), é completo.*

Vamos finalizar esta seção apresentando mais exemplos de espaços métricos completos.

Exemplo 6.9. Uma bola fechada $B[a, r]$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, porque é um subconjunto fechado (veja o Exemplo 4.25) do espaço métrico completo $\mathbb{R}^n$ (veja a Proposição 6.5 e o Corolário 6.8). Mais geralmente, se M é completo, as bolas fechadas de M são espaços métricos completos.

Exemplo 6.10. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$, discutido no Exemplo 2.8, é completo com a métrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R}).$$

De fato, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $m, n \geqslant n_0$, temos

$$\rho(f_m, f_n) = \sup_{t\in X} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon. \tag{6.1}$$

Assim, para todo $t \in X$,

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon, \quad \text{com } m, n \geqslant n_0.$$

Dessa forma, $(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t), \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é completo, a sequência $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Pelo Teorema 5.12, para cada $t \in X$, podemos associar à sequência $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ um único número real $f(t)$. Isso define uma função f de X em $\mathbb{R}$.

Mostremos $f_n \to f$ uniformemente[2] e que f pertence a $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$.

Da expressão (6.1), quando $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\epsilon \geqslant \lim_{n\to\infty} \rho(f_m, f_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in X} |f_m(t) - f_n(t)| \\
&= \sup_{t\in X} \left| \lim_{n\to\infty} f_m(t) - \lim_{n\to\infty} f_n(t) \right| \\
&= \sup_{t\in X} |f_m(t) - f(t)| \\
&= \rho(f_m, f) \quad (m \geqslant n_0).
\end{aligned}$$

Assim sendo, para todo $t \in X$, temos

$$|f_m(t) - f(t)| \leqslant \epsilon \quad (m \geqslant n_0). \tag{6.2}$$

Com isso, foi mostrado que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em X.

Afirmamos que f é limitada. De fato, como f_{n_0} é limitada, existe $K > 0$ tal que

$$|f_{n_0}(t)| \leqslant K, \quad \forall t \in X. \tag{6.3}$$

Portanto, de (6.2) e (6.3) segue que, para todo $t \in X$, vale

$$|f(t)| \leqslant |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t)| \leqslant \epsilon + K,$$

de onde podemos concluir que $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$.

Exemplo 6.11. O espaço vetorial das funções contínuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, denotado por $C[a,b]$, é completo com a métrica[3]

$$d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|, \quad f, g \in C[a,b].$$

De fato, o Teorema de Weierstrass (veja [10, Capítulo 5]) afirma que toda função contínua definida num intervalo fechado e limitado é limitada. Portanto, podemos atestar que $C[a,b] \subset \mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ e ainda que $C[a,b]$ é um espaço métrico com a métrica induzida de $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$.

Pela Proposição 6.5, para mostrar $C[a,b]$ é completo, basta provar que $C[a,b]$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$. Para tanto, observe que se $f_n \to f$ em $[a,b]$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Sendo assim, f é contínua por ser o limite uniforme de funções contínuas (veja este último resultado mencionado em [10, Capítulo 12]).

Tipos especiais de espaços métricos completos serão considerados na seção seguinte.

[2] Dizemos que $f_n \to f$ converge uniformemente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(t) - f(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in X.$$

[3] É sabido que toda função contínua definida num intervalo fechado e limitado é limitada (Teorema de Weierstrass [10, Capítulo 5]), por isso consideramos em $C[a,b]$ a métrica definida no Exemplo 2.8.

6.2 Espaço de Banach

Chamamos de espaço de Banach um espaço vetorial normado completo. A definição formal segue abaixo.

Definição 6.12. Um espaço normado E é chamado **espaço de Banach** quando é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma (veja a Proposição 2.14).

O Corolário 6.8 e o Exemplo 2.15 permitem-nos introduzir o seguinte exemplo de espaço de Banach.

Exemplo 6.13. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é completo com as normas euclidiana, da soma e do máximo. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

Com o Exemplo 6.10, obtemos o seguinte.

Exemplo 6.14. O espaço normado $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{R}$, apresentado no Exemplo 2.16, com a norma

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

é um espaço de Banach.

Como consequência da Proposição 6.5, temos o seguinte resultado.

Proposição 6.15. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então, F é um espaço de Banach com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E.*

Por fim, levando em conta o Exemplo 6.11 e a Proposição 6.11, podemos ainda afirmar que $C[a,b]$ é um espaço de Banach com a norma de $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$, a saber, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ para $f \in C[a,b]$.

7 Teorema do Ponto Fixo de Banach

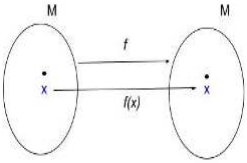
Um ponto fixo de uma função é um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fixo de uma função $f : A \to A$ se $f(x) = x$. Existem diversos teoremas que garantem a existência de pelo menos um ponto fixo para funções que satisfazem determinadas condições, propostos por diversos matemáticos, tais como: Banach, Brouwer, Schauder, Kakutani e Krasnoselskii.

Para abordar os Teoremas de Ponto Fixo de Brouwer, Schauder, Kakutani e Krasnoselskii, precisaríamos de pré-requisitos que não foram explorados ao longo do texto. Por isso, não os apresentaremos aqui. No entanto, indicamos as referências [1, 6, 7] e [15] ao leitor interessado em estudá-los.

Neste capítulo, concentrar-nos-emos em apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, contextualizando-o e provando-o. Também faremos uma pequena nota a respeito do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Antes disso, formalizaremos o conceito de ponto fixo e o ilustraremos com exemplos em $\mathbb{R}$. As referências que utilizamos para confeccionar este capítulo foram [9, 12] e [16].

Definição 7.1 (Ponto fixo)**.** Seja (M, d) um espaço métrico. Um **ponto fixo** de uma função $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Figura 7.1: Ilustração de um ponto fixo de $f : M \to M$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nos exemplos a seguir, vamos considerar $M = \mathbb{R}$ dotado da métrica usual.

Exemplo 7.2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem dois pontos fixos, que são os pontos 0 e 1. Note que, para $x = 0$, temos

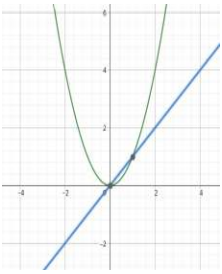
$$f(0) = 0^2 = 0$$

e para $x = 1$, temos

$$f(1) = 1^2 = 1.$$

Na Figura 7.2, os pontos fixos de $f(x) = x^2$ estão indicados pela interseção dos gráficos de f e da função identidade $i(x) = x$.

Figura 7.2: Pontos fixos da função $f(x) = x^2$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Exemplo 7.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, tem três pontos fixos, que são os pontos $0, 1$ e -1. Note que, para $x = 0$, temos

$$f(0) = 0^3 = 0,$$

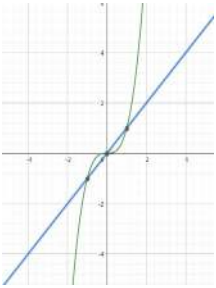
para $x = 1$, temos

$$f(1) = 1^3 = 1.$$

e para $x = -1$, temos

$$f(-1) = (-1)^3 = -1.$$

Figura 7.3: Pontos fixos da função $f(x) = x^3$.

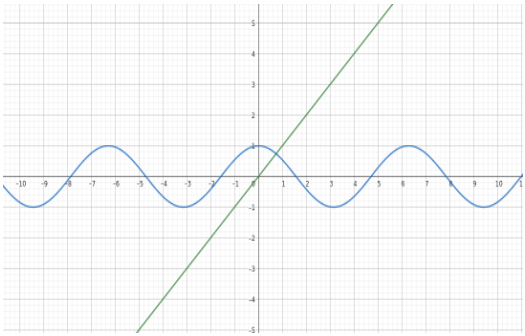


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 7.3, os pontos fixos de $f(x) = x^3$ estão indicados pela interseção dos gráficos de f e da função identidade $i(x) = x$.

Exemplo 7.4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(x)$, possui um ponto fixo, indicado pela interseção das curvas $y = \cos(x)$ e $y = x$ no gráfico a seguir.

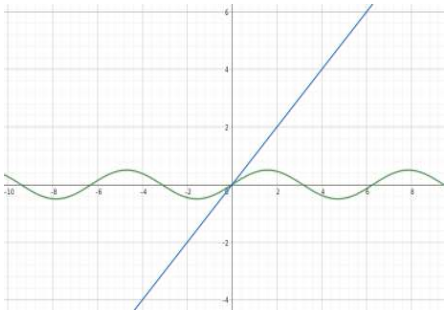
Figura 7.4: Ponto fixo da função $f(x) = \cos(x)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Exemplo 7.5. Claramente, 0 é um ponto fixo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, pois $\operatorname{sen}(0) = 0$.

Figura 7.5: Ponto fixo da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

7.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

O Teorema do Ponto Fixo de Banach pode ser usado para demonstrar resultados importantes da Análise, como por exemplo, resultados de existência e unicidade em equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, equações diferenciais funcionais, além de outras aplicações - algumas serão apresentadas no próximo capítulo. O teorema recebeu o nome do matemático polonês Stefan Banach (1892–1945), que o provou em 1922.

Para apresentar o referido teorema, precisaremos do conceito de contração exibido no Capítulo 3. Portanto, solicitamos ao leitor que recorde a Definição 3.3.

Teorema 7.6 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (M,d) um espaço métrico completo. Se $f : M \to M$ é uma contração, então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Como f é uma contração, existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y), \quad \text{para quaisquer } x, y \in M. \tag{7.1}$$

(I) Inicialmente, provemos a existência de um ponto fixo x_0 para a função f.

Vamos tomar $x_0 \in M$ arbitrariamente e definir $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$. Assim, temos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M, definida por recorrência da forma $x_{n+1} = f(x_n)$. Se $x_1 = f(x_0) = x_0$, temos validade de (I). Para continuar, vamos assumir que $x_1 \neq x_0$ e, portanto, $d(x_0, x_1) > 0$ (M2).

Afirmação 1. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, sempre que $m, n \geqslant n_0$.

De fato, de (7.1) segue que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leqslant c \cdot d(x_0, x_1) \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant c \cdot d(x_1, x_2) \leqslant c^2 \cdot d(x_0, x_1) \\ d(x_3, x_4) &= d(f(x_2), f(x_3)) \leqslant c \cdot d(x_2, x_3) \leqslant c^3 \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Suponha por indução que $d(x_k, x_{k+1}) \leqslant c^k \cdot d(x_0, x_1)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Repetindo o processo descrito acima para o próximo termo, temos

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \leqslant c \cdot d(x_k, x_{k+1}) \leqslant c \cdot c^k \cdot d(x_0, x_1) = c^{k+1} \cdot d(x_0, x_1).$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, obtemos

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant c^n \cdot d(x_0, x_1), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

Se $m > n$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. De (7.2) segue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+k}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant c^n d(x_0, x_1) + c^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + c^{n+k-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+k-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &= c^n \left(1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Note que $1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}$ é soma de uma progressão geométrica de k termos, sujo primeiro termo é 1 e a razão é c. Logo, seu valor[1] é:

$$\frac{(c^k - 1) \cdot 1}{c - 1} = \frac{1 - c^k}{1 - c}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} c^n \left(1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) &= c^n \left[\frac{1 - c^{k-1+1}}{1 - c}\right] d\left(x_0, x_1\right) \\ &= c^n \left(1 - c^k\right) \left[\frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1 - c}\right] \\ &< c^n \left[\frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1 - c}\right], \end{aligned} \tag{7.4}$$

onde a desigualdade se justifica pelo fato de que $1 - c^k < 1$, posto que $c > 0$.

Portanto, se $m > n$, por (7.3) e (7.4), temos

$$d\left(x_n, x_m\right) < c^n \left[\frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1 - c}\right]. \tag{7.5}$$

Fato. $\lim\limits_{n \to \infty} c^n = 0$.

Com efeito, como $0 < c < 1$, podemos afirmar que existe $d > 0$ tal que $c = \dfrac{1}{1 + d}$. Lembrando da fórmula do Binômio de Newton, temos

$$(1 + d)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^i > \binom{n}{0} = n,$$

de onde segue que

$$c^n = \left(\frac{1}{1 + d}\right)^n < \frac{1}{n}.$$

Pelo Lema 5.17, comprovamos a validade do fato enunciado, ou seja, que $\lim\limits_{n \to \infty} c^n = 0$.

Dado $\epsilon > 0$, como $0 < c < 1$, temos

$$\tilde{\epsilon} = \left[\frac{1 - c}{d\left(x_0, x_1\right)}\right] \epsilon > 0.$$

Posto que $\lim c^n = 0$, podemos afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad c^n = \left|c^n - 0\right| < \tilde{\epsilon}. \tag{7.6}$$

Então, por (7.5) e (7.6), para $m, n \geqslant n_0$, com $m > n$, obtemos

$$d\left(x_n, x_m\right) < c^n \left[\frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1 - c}\right] < \left[\frac{1 - c}{d\left(x_0, x_1\right)}\right] \epsilon \left[\frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1 - c}\right] = \epsilon,$$

provando a afirmação de que $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como M é completo, existe $x \in M$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Agora, note que:

[1] A fórmula para obter a soma de k elementos de uma progressão geométrica finita $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de razão $c > 0$, com $a_k = a_1 \cdot c^{k-1}$ é:

$$S_k = \frac{a_1 \cdot (c^{k-1} - 1)}{c - 1}.$$

(i) como f é contínua em x (pois toda contração é contínua em seu domínio - Proposição 3.7), segue da Proposição 5.18 que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$.

Portanto, por (i) e (ii) e pela unicidade do limite (Proposição 5.12), concluímos que $f(x) = x$, provando a existência de um ponto fixo para f.

(II) Provemos, agora, a unicidade de tal ponto fixo.

Suponhamos, por absurdo, que exista $y \in M$ tal que $f(y) = y$, com $y \neq x$. Sendo assim, temos

$$0 \overset{(M2)}{<} d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y).$$

Mas $d(x,y) \leqslant cd(x,y)$ implica $1 \leqslant c$, o que é absurdo, pois $c < 1$. Logo, $x = y$.

De (I) e (II) segue o resultado. □

7.2 Nota sobre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer foi proposto pelo matemático holandês Luitzen E. Jan Brouwer em 1910. Há relatos de que esse resultado teve sua origem na observação de Brouwer enquanto ele agitava uma xícara de café. Ao examinar com grande atenção o movimento do líquido dentro da xícara, ele concluiu que, invariavelmente, existe pelo menos um ponto na superfície que não está em movimento. É importante destacar que o ponto fixo não necessariamente corresponde ao que aparenta estar estático, uma vez que o centro da turbulência se desloca ligeiramente. Esse é o princípio subjacente ao referido teorema em três dimensões.

O enunciado para a dimensão n do teorema é o seguinte: "Seja $B = B[0,1]$ a bola fechada de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^n$. Se $f\colon B \to B$ é uma função contínua, então f tem pelo menos um ponto fixo, ou seja, existe pelo menos um ponto $x \in B$ tal que $f(x) = x$." Além disso, o conjunto B no enunciado pode ser substituído por qualquer subconjunto fechado, convexo [2] e limitado de um espaço métrico M. Note que se o espaço métrico for completo e f for uma contração, estaremos nas condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach, uma vez que se B é subconjunto fechado num espaço métrico completo, então B é também é completo (Proposição 6.5).

A prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão n exige muitas preliminares que não tivemos a pretensão de abordar neste trabalho. Por essa razão, decidimos nos limitar a exibir o teorema para o caso $n = 1$, que exige somente o conhecimento do Teorema do Valor Intermediário, enunciado a seguir. Sua prova pode ser recordada pelo leitor nas referências [9, 10].

Teorema 7.7 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \leqslant d \leqslant f(b)$ (ou $f(b) \leqslant d \leqslant f(a)$), então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema 7.8 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Se $f : [a,b] \to [a,b]$ é uma função contínua, então f tem pelo menos um ponto fixo, ou seja, existe pelo menos um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.*

[2] Um subconjunto X de um espaço métrico M é convexo se, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$, vale $(1-t)x + ty \in X$. Bolas abertas e fechadas (e, portanto, intervalos abertos e fechados em $\mathbb{R}$) são exemplos de conjuntos convexos - veja [9].

Demonstração. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Como a função identidade $i(x) = x$ é contínua em $[a, b]$ (veja o Exemplo 3.8) e a função f é contínua por hipótese, a Proposição 3.13 garante que g é contínua em $[a, b]$.

Além disso, como o domínio e o contradomínio de f são iguais ao intervalo $[a, b]$, temos

$$f(a) \geqslant a \quad \text{e} \quad f(b) \leqslant b,$$

implicando que $g(a) \geqslant 0$ e $g(b) \leqslant 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário (considerando $d = 0$ no enunciado do Teorema 7.7), existe um $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = c$. □

8 Algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Este capítulo será dedicado a três aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 7.6). Escolhemos apresentar aplicações que podem ser discutidas em cursos de graduação em Matemática, modalidades Licenciatura e Bacharelado, que ilustram a aplicabilidade e a beleza da teoria de espaços métricos. Alguns detalhes de toda a teoria para abordá-las serão omitidos, o professor pode fazer o mesmo, desde que deixe no aluno o conhecimento, a relevância da teoria de espaços métricos e o desejo de estudar Matemática.

Inicialmente, apresentaremos um problema simples de existência de solução para uma equação não linear em $\mathbb{R}$. Em seguida, mostraremos como o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o buscador do Google estão relacionados e, por fim, discutiremos como o referido teorema se aplica ao processo de compressão de imagens.

Para construir este capítulo, tivemos como base as referências [3, 5, 14] e [16].

8.1 Uma aplicação na reta

Vamos considerar o espaço métrico $\mathbb{R}$ dotado da métrica usual (Exemplo 2.3).

Considere a equação não linear

$$x = \gamma \operatorname{sen}(x) + 1, \tag{8.1}$$

onde $0 < \gamma < 1$ é uma constante real. A equação (8.1) possui solução? Ademais, se possui solução, ela é única?

Sabendo que $\mathbb{R}$ é completo (Exemplo 6.3), para utilizarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, devemos mostrar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \gamma \operatorname{sen}(x) + 1$, é uma contração. Pois bem, para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos

$$d(f(x), f(y)) = \gamma |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| = \gamma \left| - \int_x^y \cos(t) dt \right| \leqslant \gamma \int_x^y |\cos(t)| dt.^{1}$$

Como $|\cos(t)| \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\gamma \int_x^y |\cos(t)| dt \leqslant \gamma |x - y| = \gamma d(x, y).^{2}$$

[1] A propriedade da integral de Riemann usada na desigualdade pode ser verificada em [10]. A saber, foi usada a seguinte propriedade: se $h\colon [x, y] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então $|h|$ também é e vale $\left| \int_x^y h(t) dt \right| \leqslant \int_x^y |h(t)| dt$. Cabe lembrar que a função $h(x) = \cos(x)$ é integrável em todo intervalo limitado da reta.

[2] Para obter a desigualdade, foi usada a seguinte propriedade: se $g, h\colon [x, y] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e $g(t) \leqslant h(t)$ para todo $t \in [x, y]$, então $\int_x^y g(t) dt \leqslant \int_x^y h(t) dt$. Neste caso, $g(t) = |\cos(t)|$ e $h(t) = 1$.

Assim,

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma d(x, y),$$

de onde segue que f é uma contração, posto que $0 < \gamma < 1$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 7.6), f admite um único ponto fixo, ou seja, a equação $x = \gamma \operatorname{sen}(x) + 1$ admite uma única solução. Veja uma ilustração do problema na Figura 8.1, considerando $\gamma = 1/2$.

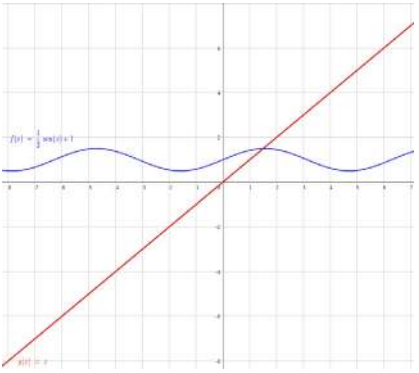


Figura 8.1: Ponto fixo da função $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + 1$, representado pela interseção dos gráficos de f e $g(x) = x$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

8.2 Aplicação ao algoritmo de classificação de páginas do Google

A história da internet tem suas raízes no contexto da Guerra Fria (1945-1991), quando as duas principais potências envolvidas, os Estados Unidos e a União Soviética, estavam polarizadas entre os blocos socialista e capitalista, competindo por influência e domínio.

Com o objetivo de aprimorar a comunicação e o compartilhamento de informações, em parte devido às preocupações com possíveis ataques soviéticos, o Departamento de Defesa dos Estados Unidos, por meio da ARPA (Advanced Research Projects Agency), desenvolveu um sistema destinado a facilitar a transferência de dados entre indivíduos geograficamente distantes. O propósito principal era melhorar as estratégias militares. Foi nesse contexto que surgiu o protótipo da primeira rede de internet, conhecida como Arpanet (Advanced Research Projects Agency Network).

Assim, no dia 29 de outubro de 1969, foi realizada a primeira conexão entre a Universidade da Califórnia e o Instituto de Pesquisa de Stanford. Este evento marcou um momento histórico, pois representou o envio do primeiro e-mail na história da internet.

Após o advento da Internet, no ano de 1993, surgiram os primeiros buscadores. Muitos sabem dizer o que o um buscador faz, mas como ele funciona? Necessariamente todo buscador desenvolve dois caminhos:

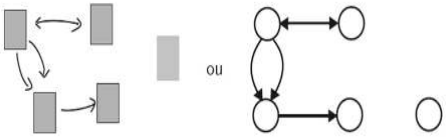
1. *Matching*: O algoritmo busca, dentre todas as páginas da Web, aquelas que contêm as palavras (ou frases) digitadas.

2. *Ranking*: O algoritmo seleciona quais, dentre as páginas encontradas, são as mais "relevantes" no passo 1, e ordena o resultado.

Note que o caminho mais objetivo é o *Ranking*, observe a imagem a seguir:

Em 1997 e 1998, os doutorandos em Ciência da Computação da Universidade de Stanford, Larry Page e Sergey Brin, criaram um novo buscador, o *Google*. O Google tinha algo de diferente; pouco depois de seu lançamento, a revista PC Magazine o elegeu como um dos 100 melhores sites da época e comentou que o Google possuía "an uncanny knack for returning extremely relevant results"("um talento incrível para retornar resultados extremamente relevantes"). Páginas na internet são conectadas por hyperlinks (ou apenas links). Podemos pensar nas páginas como nós de um grafo[3] direcionado e nos links como as arestas. A ideia é simples: a quantidade de links que chegam e que saem de uma página devem dizer alguma coisa sobre a relevância dela.

Figura 8.2: Páginas conectadas por links.



Fonte: Adaptado de [3].

A proposta do Google consiste em avaliar a relevância de uma página com base na soma das relevâncias das páginas que fazem referência a ela, e essa soma é então dividida pelo número de links que essas páginas fornecem, ou seja, cada página contribui de maneira igualitária para a relevância das páginas às quais ela se refere. Portanto, podemos inferir que se uma página recebe referências de páginas consideradas significativas, ela também deve ser considerada relevante.

Vamos constatar que o Teorema Ponto Fixo de Banach (Teorema 7.6) garante a viabilidade da proposta dos criadores do Google.

Com efeito, seja H um grafo direcionado, com nós $1, 2, \ldots, n$. O objetivo da proposta do Google é, para cada nó i, atribuir um valor real x_i que traduza a relevância do nó i. Quando j for um nó que apontar para i, chamaremos de **link de** i **para** j e denotaremos por $j \to i$. Sendo ℓ_j o número de links que saem de j, definimos

$$x_i = \sum_{j \to i} \frac{x_j}{\ell_j}.$$

[3]Um grafo é uma que representação abstrata de um conjunto de objetos e das relações existentes entre eles. É definido por um conjunto de nós ou vértices, e pelas ligações ou arestas, que ligam pares de nós.

Com isso, temos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{m_{11}}{\ell_1}x_1 + \dfrac{m_{12}}{\ell_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{1n}}{\ell_n}x_n \\ x_2 = \dfrac{m_{21}}{\ell_1}x_1 + \dfrac{m_{22}}{\ell_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{2n}}{\ell_n}x_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{m_{n1}}{\ell_1}x_1 + \dfrac{m_{n2}}{\ell_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{nn}}{\ell_n}x_n, \end{cases}$$

onde m_{ij} é o número de links $j \to i$, que pode inclusive ser zero. Nesses termos, se $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \dfrac{m_{ij}}{\ell_j}$, então podemos enxergar $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como uma transformação linear e a relevância $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ sendo um autovetor de autovalor unitário. Vamos interpretar a_{ij} como sendo a probabilidade de, saindo do vértice j, chegar ao vértice i.

Um internauta, de forma aleatória, escolhe uma das n páginas, por exemplo, $v_0 = [1, 0, \ldots, 0]$. O vetor v_1, obtido na equação $Av_0 = v_1$, indica a probabilidade do internauta se encontrar na página i após um clique, partindo de v_0. Continuando assim, sucessivamente, após n cliques, a probabilidade de o internauta se encontrar na página i é dado pela equação $Av_{n-1} = v_n$. Esse modelo seria ideal se o internauta sempre, a partir de um link de uma página, encontrasse outro de outra página, porém isso não ocorre. Por motivos diversos, seja de páginas sem links ou por vontade própria do internauta, ele para sua sequência e a recomeça. A partir daí, a ideia de Page e Brin para resolver esse problema foi introduzir um fator probabilístico p de começar tudo de novo e, evidentemente, $1 - p$ de permanecer nos links. Experimentalmente, o Google decidiu usar $p = 0,15$. Assim, a função que indica o percurso aleatório do internauta num grafo de n vértices é dada por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{\ell_1} & \frac{m_{12}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{1n}}{\ell_n} \\ \frac{m_{21}}{\ell_1} & \frac{m_{22}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{2n}}{\ell_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{m_{n1}}{\ell_1} & \frac{m_{n2}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{nn}}{\ell_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

a qual podemos escrever como $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(y) = p \cdot e + (1-p)Ay$, onde

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

A função f é contínua, pois é soma de funções contínuas (veja a Proposição 3.13). A parte "$p \cdot e$" é constante e, portanto, contínua, e a parte "$(1-p)Ay$" é contínua por ser linear num espaço vetorial de dimensão finita, $\mathbb{R}^n$ (veja [8]). Se mostrarmos que f é uma contração e lembrando que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, o Teorema do Ponto

Fixo de Banach (Teorema 7.6) garantirá que f possui um único ponto fixo, ou seja, que o internauta chegará sempre à página desejada. Faremos isso. Pois bem, dados $y, z \in \mathbb{R}^n$, notando que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

e considerando em $\mathbb{R}^n$ a norma da soma (recorde o Exemplo 2.15), temos

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(z)\| &= \|(1-p)A(y-z)\| = (1-p)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,|y_i - z_i|\right)\\ &= (1-p)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)|y_i - z_i| = (1-p)\sum_{j=1}^{n}|y_i - z_i| = (1-p)\|y-z\|.\end{aligned}$$

Uma vez que $1-p$ é menor que 1, concluímos que f é uma contração. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, a função f possui um único ponto fixo, indicando que a relevância de cada página está bem definida.

Encerraremos este trabalho com a aplicação descrita na seção subsequente.

8.3 Uma ideia sobre a aplicação no processo de compressão de imagens

Sabe-se que a maneira mais eficiente de armazenar uma imagem em uma memória é armazenar a cor de cada pixel. A tentativa de ampliar uma imagem pode tornar os pixels quadrados grandes, causando uma insuficiência de informações para o preenchimento dos detalhes nesses quadrados.

O princípio da compressão de imagens é reduzir a quantidade de informação contida na imagem original, de modo que os olhos não percebam que a imagem observada está adulterada. A internet tem aumentado a necessidade de bons sistemas de compressão de imagens, haja vista que a compressão de imagens diminui consideravelmente a velocidade de navegação na mesma. Ou seja, para que ocorra uma navegação rápida e eficiente, é recomendável que as imagens estejam codificadas em arquivos menores. Existem vários procedimentos para a compressão de imagens e o mais comum é o JPEG, que se tornou padrão para imagens digitais [3].

O matemático britânico Michael Barnsley introduziu um método chamado de sistemas de funções iteradas que consiste numa técnica para se construir figuras fractais através da repetição em escala de uma mesma figura. O processo tem como objetivo aproximar uma imagem por objetos geométricos. A ideia do processo de compressão no triângulo de Sierpinski será introduzida a seguir.

Note que o triângulo de Sierpinski é uma reunião de três cópias de si mesmo, cada cópia possuindo a metade de suas dimensões, largura e altura. A partir de um triângulo de Sierpinski, podemos construir um segundo triângulo com o seguinte procedimento:

• *Passo 1.* Reduza o Triângulo de Sierpinski para metade do seu tamanho, a partir do seu vértice inferior esquerdo.

Observe que o lado do triângulo obtido neste primeiro passo é uma contração de $1/2$ do lado do triângulo original. Assim, estamos considerando a seguinte contração de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$:

$$T_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Figura 8.3: Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Retirado de [3].

• *Passo 2.* Construa uma segunda cópia do Triângulo de Sierpinski obtido no primeiro passo e coloque-a à direita. Neste segundo passo, o lado do triângulo obtido continua sendo uma contração de 1/2 do lado do triângulo original e, além disso, o triângulo é transladado pelo vetor $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Agora, a função de contração de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ a ser considerada é a seguinte:

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

• *Passo 3.* Por fim, construa uma terceira cópia do Triângulo de Sierpinski obtido no primeiro passo e coloque-a no topo. Por fim, temos que o lado do triângulo obtido neste terceiro passo permanece sendo uma contração de 1/2 do lado do triângulo original e, além disso, o triângulo é transladado pelo vetor $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Assim, a função de contração de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que fazemos neste passo é dada por:

$$T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Cabe observar que a prova de que as funções T_1, T_2 e T_3 são contrações foi feita no Exemplo 3.6.

A segunda figura construída pelo processo descrito acima é idêntica ao triângulo de Sierpinski inicial. Dessa forma, podemos concluir que o triângulo de Sierpinski é o ponto fixo do processo. Ou seja, se S é o triângulo de Sierpinski, então

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S). \tag{8.2}$$

Diante desse processo, surge a questão: será que existem outros subconjuntos A do plano que têm a mesma propriedade, ou seja, tais que

$$A = T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A)?$$

Vamos constatar que a resposta é não. Dessa forma, poderemos garantir que o triângulo de Sierpinski é o único subconjunto S do plano que satisfaz a equação (8.2). Para tanto, construímos uma função ω que associa a cada subconjunto fechado e limitado A de $\mathbb{R}^2$ o subconjunto $T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A)$ de $\mathbb{R}^2$, da seguinte forma:

$$A \in \mathcal{K} \mapsto \omega(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A),$$

onde $\mathcal{K} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ é fechado e limitado em } \mathbb{R}^2\}$. A prova de que ω é uma contração de $\mathcal{K}$ em $\mathcal{K}$ exige mais preliminares, por isso decidimos não apresentá-la aqui, mas obviamente usa o fato de que T_1, T_2 e T_3 são contrações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Para consultá-la, indicamos a referência [14].

Sendo ω uma contração, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, podemos inferir que S é o único ponto fixo dessa função, ou seja, que $S = \omega(S)$.

Para mais detalhes sobre essa aplicação, sugerimos ao leitor que consulte a referência [14] e as referências nela contidas.

9 Considerações finais

A noção de completude dos espaços métricos fornece um ambiente propício para garantir a convergência de sequências, enquanto o Teorema do Ponto Fixo de Banach estabelece um elo entre contrações e a existência de pontos que permanecem inalterados sob suas aplicações.

A aplicação dos conceitos da teoria de espaços métricos, bem como a do Teorema do Ponto Fixo de Banach vai além da Matemática Pura, sendo crucial na análise de existência de soluções para equações diferenciais (veja [12, 1]), otimização, teoria dos conjuntos fractais, entre outras áreas. A versatilidade do Teorema do Ponto Fixo de Banach destaca-se, permitindo sua utilização em diversos contextos matemáticos, onde a busca por soluções está intrinsecamente ligada à compreensão da estrutura dos espaços métricos.

Por meio da organização cuidadosa dos capítulos desta dissertação, buscamos não apenas transmitir o teorema em si, mas também fornecer todos os pré-requisitos necessários ao seu entendimento, além de enfatizar a beleza e a aplicabilidade da teoria de espaços métricos.

Referências

[1] R.P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan. *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[2] P. T. L. F. Albuquerque. *Ponto fixo: uma introdução no ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014.

[3] C. D. V. Barros. *O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[4] J. C. Berni. *Espaços Métricos*. Notas de aula - USP, São Paulo, 2021.

[5] T. J. Fonseca. A matemática por trás do Google. *Seminários de Coisas Legais - USP*, pages 1–162, 2020.

[6] K. Goebel and W. A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1990.

[7] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed Point Theory*. Monographs in Mathematics. Springer, 2003.

[8] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley classics library. Wiley, 1978.

[9] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[10] E. L. Lima. *Análise Real - Volume 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[11] E. L. Lima. *Análise Real - Volume 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

[12] M. A. Mannan, M. R. Rahman, H. Akter, N. Nahar, and S. Mondal. A Study of Banach Fixed Point Theorem and It's Applications. *American Journal of Computational Mathematics*, 11:157–174, 2021.

[13] F. S. Melo. *Espaços métricos completos e Teorema de Banach-Steinhaus*. Trabalho de Conclusão de Curso. Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, Amapá, 2016.

[14] C. Rosseau. Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações. *Gazeta de Matemática*, 164, 2011.

[15] D. R. Smart. *Fixed Point Theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1980.

[16] A. K. S. Trindade. *O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações.* Trabalho de Conclusão de Curso. Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, Macapá, 2019.

Biografia dos Autores



Francisco José dos Santos é professor vinculado à Coordenação de Matemática da Secretaria Municipal de Educação de Oeiras-PI, com atuação na zona rural, e técnico de ensino lotado na 8ª Gerência Regional de Educação (8ª GRE) de Oeiras, vinculada à Secretaria de Estado da Educação do Piauí (SEDUC-PI). Atua também como professor pesquisador da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Piauí (FAPEPI), onde desenvolve a pesquisa intitulada *"Potencializando Estratégias Pedagógicas através do Learning Analytics e Tecnologia da Informação: Uma Abordagem Focada em Excel com os Estudantes do Curso Técnico de Informática",* no âmbito do programa PIBIC Júnior da SEDUC-PI. É Técnico em Administração pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI, 2015) e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI, 2016). Possui diversas especializações, incluindo Metodologia do Ensino da Matemática e Docência do Ensino Superior (FAEME, 2018), Gestão de Recursos Ambientais no Semiárido (IFPI, 2018), Ensino de Física (IFPI, 2019) e Processos Didáticos-Pedagógicos para Cursos na Modalidade a Distância (UNIVESP, 2023). É Mestre em Matemática na área de Matemática do Ensino Superior pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp, 2024), com ênfase em análise matemática e aplicações do teorema do ponto fixo. Sua trajetória profissional é marcada pela dedicação ao ensino de Matemática e Física, abrangendo os níveis básico e superior, em modalidades presenciais e a distância (EaD). Sua atuação inclui o uso de tecnologias educacionais e a pesquisa aplicada ao ensino, consolidando sua contribuição para a formação de estudantes e o avanço da educação no estado do Piauí.



Suzete Maria Silva Afonso é Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), no campus de Rio Claro. É bacharel (2007) e mestre (2008) em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF) e doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), título obtido em 2011. Realizou pós-doutorado na Academy of Sciences of the Czech Republic em 2013. Em 2019, conquistou o título de livre-docente pela UNESP. Sua área de especialização é Análise, com foco nas subáreas de Equações Diferenciais Funcionais, Equações Diferenciais Impulsivas e Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas.

Um Estudo Introdutório

Sobre o

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Francisco José dos Santos
Suzete Maria Silva Afonso
(Autores)

